20ο Μάθημα Πιθανοτήτων

21/4/2010

Ειδικές συνεχείς κατανομές

① Γραμμική συνάρτηση τ.μ.

X συνεχής τ.μ. με σ.κ. $F_X(x)$

σ.π.π. $f_X(x)$

$E[X]$

$Var[X]$

$Y = aX+b$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX+b \le y) \overset{a>0}{=} P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX+b \le y) \overset{a<0}{=} P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

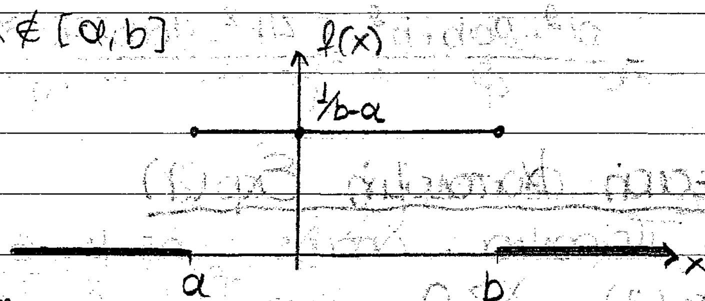
$a \neq 0$ $\quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$E[Y] = a E[X] + b \quad , \quad Var[Y] = a^2 Var[Y]$

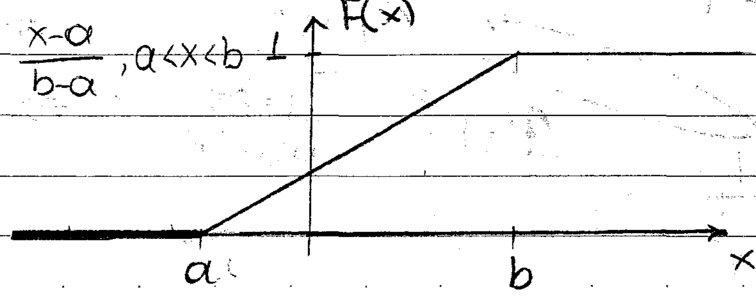
② Ομοιόμορφη κατανομή (Uniforum ([a, b]))

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$X \sim Uniforum([a,b])$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,du = \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$



ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$X \sim Uniform([0,1]) \Rightarrow (b-a)X + a \sim Uniform([a,b])$.

Απόδειξη:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \xRightarrow{Y=(b-a)X+a} f_Y(y) = \frac{1}{b-a} f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a} \cdot 1, & \frac{y-a}{b-a} \in [0,1] \\ \frac{1}{b-a} \cdot 0, & \frac{y-a}{b-a} \notin [0,1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le y \le b \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

Μέση Τιμή - Διασπορά κτλ.

$Y \sim Uniform([a,b])$

$$E[Y^n] = \int_{-\infty}^{\infty} y^n f(y)\, dy = \frac{1}{b-a}\int_a^b y^n\, dy = \frac{1}{b-a}\left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$$

$$E[Y] = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} -$$

$$- \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{4b^2-4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3) Εκθετική Κατανομή $Exp(\lambda)$

Τυχαίο Πείραμα: Χρόνος ζωής με σταθερό ρυθμό θανάτου λ

$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad X \geq 0$ $\quad \boxed{\lim_{t \to 0^+} \frac{P(t < X \le t+dt \,/\, X>t)}{dt}} = \lambda$, $\quad t \geq 0$

$\lambda(t) =$ ρυθμός βλάβης / θανάτου

failure / hazard rate

ΠΡΕΠΕΙ

$$\lim_{dt\to 0^+} \frac{P(t< X\le t+dt)}{dt\; P(X>t)} = \lambda, \quad t\ge 0, \qquad \frac{\overset{\text{σ.π.π.}}{f_X(t)}}{\underset{\text{σ.κ.}}{1-F_X(t)}} = \lambda, \quad t\ge 0$$

Έστω $g(t) = 1-F_X(t)$. Τότε $g'(t) = -f_X(t)$.

Άρα πρέπει να βρω το $g(t)$ ώστε

$$-\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda \Leftrightarrow (\log g(t))' = -\lambda \Leftrightarrow \log g(t) = -\lambda t + c \Leftrightarrow$$

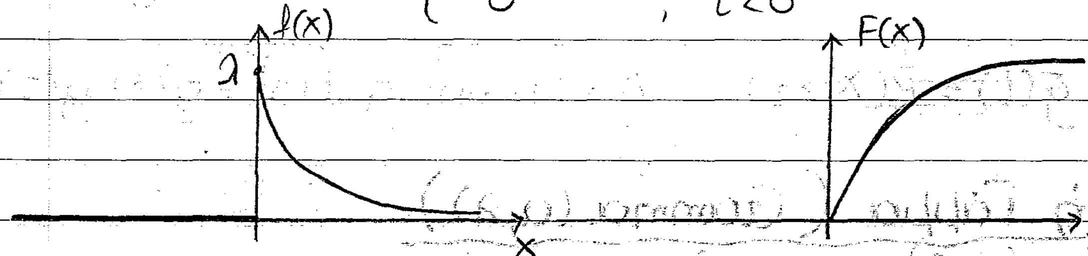
$\Leftrightarrow g(t) = C e^{-\lambda t}$. Επειδή $g(0) = 1-F_X(0) = 1-0 = 1$, πρέπει $\underline{\underline{C=1}}$

<u>Άρα</u>: για να μοντελοποιήσω χρόνο ζωής με σταθερό ρυθμό θανάτου λ, $X\ge 0$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \quad \text{σ.κ.}$$

$$\Updownarrow$$

$$X\sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow f_X(t) = \begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \quad \text{σ.π.π.}$$



$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^n\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} x^n (-e^{-\lambda x})'\,dx =$$

$$= \left[-x^n e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{n}{\lambda}\int_0^{\infty} x^{n-1}\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]$$

$$E[X^n] = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}] = \frac{n}{\lambda}\,\frac{n-1}{\lambda}\cdots\frac{1}{\lambda} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$X \sim Exp(\lambda) \overset{\alpha>0}{\Longrightarrow} \alpha X \sim Exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

Απόδειξη:

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

$$Y=\alpha X \quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\alpha X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{\lambda y}{\alpha}}, & y \geq 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$$

ΑΜΝΗΜΟΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ Exp

Αν $X \sim Exp(\lambda)$ τότε $P(X>s+t \mid X>t) = P(X>s)$ $\qquad s,t>0$

$$P(X-t>s \mid X>t)$$

Απόδειξη:

$$P(X>s+t \mid X>t) = \frac{P(X>s+t,\, X>t)}{P(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X>s)$$

Ισχύει και το αντίστροφο: Αν X μη αρν. τ.μ. με $P(X>s+t \mid X>t) = P(X>s)$ τότε $X \sim Exp(\lambda)$ για κάποιο λ

Απόδειξη:

Υπόδειξη: $g(t) = P(X>t)$. Αμνήμουν $\Rightarrow g(t+s) = g(t)\cdot g(s)$ κλπ.

1) Κατανομή Γάμμα (Gamma(α,λ))

$X \sim Gamma(\alpha,\lambda) \longleftrightarrow$ Χρόνος ζωής

σ.π.π. $$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$, όπου

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$. (Γενικά η $\Gamma(\alpha)$ γενικεύει το παραγοντικό $n \in \{1,2,\dots\}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!)$$

Για $\alpha=1 \Rightarrow Exp(\lambda)$

$a = n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Erlang(n, λ)

$E[X] = \dfrac{a}{\lambda}$ $\qquad Var[X] = \dfrac{a}{\lambda^2}$

$X \sim$ Gamma(a, λ)

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \frac{\lambda^n}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{n+a-1} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^{n+a}} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \underbrace{\boxed{\int_0^\infty \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^{n+a}} x^{n+a-1} e^{-\lambda x}}}_{=1} dx = \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^n \Gamma(a)} \quad (1)$$

<u>Όμως</u>: $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{a-1} (-e^{-x})' dx = \cancel{\left[-x^{a-1} e^{-x}\right]_0^\infty}^{\,0} +$

$$+ \int_0^\infty (a-1) x^{a-x} e^{-x} dx = (a-1)\Gamma(a-1)$$

<u>Άρα</u>: $(1) = \dfrac{(n+a-1)\Gamma(n+a-1)}{\lambda^n \Gamma(a)} = \dfrac{(n+a-1)(n+a-2)\Gamma(n+a-2)}{\lambda^n \Gamma(a)} =$

$$= \frac{(n+a-1)(n+a-2)\dots a \cancel{\Gamma(a)}}{\lambda^n \cancel{\Gamma(a)}}$$

$E[X] = \dfrac{a}{\lambda}$, $\qquad E[X^2] = \dfrac{(a+1)\cdot a}{\lambda^2}$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{(a+1)a}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$$