18ο Μάθημα Πιθανοτήτων

16/4/2010

Ειδικές Διακριτές Κατανομές

① Ανεξάρτητες Δοκιμές Bernoulli

$X_1, X_2, \dots$ $\qquad P(X_i = 1) = p$

$\qquad\qquad\qquad\quad P(X_i = 0) = 1-p$

W = # δοκιμών μέχρι την $1^η$ επιτυχία $\sim Geom(p)$ στο $\{1, 2, \dots\}$

Z = # $\qquad$ $n^η$ επιτυχία $\sim Neg\ Bin(n,p)$ στο $\{n, n+1, \dots\}$

$P(W = i) = p(1-p)^{i-1}, \ i = 1, 2, \dots \quad E[W] = \frac{1}{p} \quad Var[W] = \frac{1-p}{p^2}$

$P(Z = i) = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n} \quad E[Z] = \frac{n}{p} \quad Var[Z] = \frac{n(1-p)}{p^2}$

W' = # αποτυχιών μέχρι την $1^η$ επιτυχία Geom στο $\{0, 1, 2, \dots\}$

Z' = # $\qquad$ $n^η$ επιτυχία Neg Bin

Ισχύει: $W' = W - 1$ και $Z' = Z - n$

Άρα: $P(W'=i) = P(W=i+1) = p(1-p)^i, \quad i=0,1,\dots$

$$P(Z'=i) = P(Z=i+n) = \binom{i+n-1}{n-1} p^n (1-p)^i, \quad i=0,1,\dots$$

$$E[W'] = E[W]-1 = \frac{1-p}{p}$$

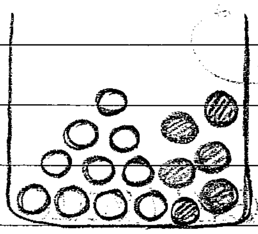
$$E[Z'] = E[Z]-n = \frac{n(1-p)}{p}$$

$\Leftarrow E[aX+b] = aE[X]+b$

$$Var[W'] = Var[W] = \frac{1-p}{p^2}, \quad Var[Z'] = Var[Z] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

$Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

2) Δειγματοληψία από πληθυσμό για μελέτη χαρακτηριστικού



Κάλπη με N σφαιρίδια

m άσπρα $\quad$ $N-m$ μαύρα

Επιλέγω n

$X = \#$ Άσπρων σφαιριδίων

1η Περίπτωση: Δειγματοληψία με επανάθεση

Τότε το μοντέλο είναι ισοδύναμο με παρατήρηση

$X_1, X_2, \dots, X_n \qquad P(X_i=1) = \frac{m}{N} = p =$ ποσοστό άσπρων

$$P(X_i=0) = \frac{N-m}{N} = 1-p$$

$X \sim Bin\left(n, \frac{m}{N}\right)$

2η Περίπτωση: Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση

$$P(X=i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \quad i=0,1,\dots,n$$

$X \sim$ Υπεργεωμετρική (n,N,m)

Hypergeom

Η $E[X]$ και η $Var[X]$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τον τύπο του Cauchy $\Rightarrow \binom{r+s}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{r}{i}\binom{s}{n-i}$

Έχουμε: $\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = \dfrac{\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i\,P(X=i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{m}{i}\binom{m-1}{i-1}\binom{N-m}{n-i}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{n} \binom{m-1}{\underbrace{i-1}_{j}}\binom{N-m}{n-i} = \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j} =$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}}\binom{m-1+N-m}{n-1} = \frac{m}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} = \frac{m\binom{N-1}{n-1}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} =$$

$$= \frac{n\cdot m}{N} = n\cdot p \quad , \quad p = \frac{m}{N} = \text{ποσοστό ατόμων}$$

Πληθυσμός με N άτομα

m έχουν το χαρακτηριστικό | $N-m$ δεν έχουν το χαρακτηριστικό

Τυχαίο Πείραμα: Επιλογή n ατόμων, $X = \#$ ατόμων που έχουν το χαρακτηριστικό

$p = \dfrac{m}{N}$ = ποσοστό ατόμων που έχουν το χαρ

με επανάθ. | χωρίς επανάθ.

$X \sim Bin(n, p)$ | $X \sim Hypergeom(n, N, m)$

$E[X] = np$ | $E[X] = np$

$Var[X] = np(1-p)$ | $Var[X] = np(1-p)\left(1 - \dfrac{n-1}{N-1}\right)$

3^{o} Άσκηση

Δίνεται η διακριτή τυχαία μεταβλητή X με σ.π. $p(x)=c(1+x)$ για $x=1,2,\ldots,10$

1) $c=;$
2) $E[X]=;$
3) $Var[X]=;$

Λύση:

1) Πρέπει: $\sum_{x} p(x)=1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{10} c(1+x)=1 \Rightarrow c\sum_{x=1}^{10}(1+x)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c\left(10+\sum_{x=1}^{10} x\right)=1 \Rightarrow c\left(10+\frac{10\cdot 11}{2}\right)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot 65=1 \Rightarrow c=\frac{1}{65}$$

Χρήσιμα Αθροίσματα:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2) $E[X]=\sum_{x} x p(x)=\frac{1}{65}\sum_{x=1}^{10}(x+x^2)=\frac{1}{65}\left(\sum_{x=1}^{10} x+\sum_{x=1}^{10} x^2\right)=$

$$=\frac{1}{65}\left(\frac{10\cdot 11}{2}+\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}\right)=\ldots$$

3) $Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\ldots$

④ Άσκηση

Εταιρία κατασκ. λαμπτήρων

P(ελαττ. λαμπτ.) = 1%

Συσκευασία 10 λαμπτήρων

Εγγύηση ότι το πολύ 1 λαμπτ. ελαττ. / πακέτο

Ποσοστό των πακέτων που θα αντικατασταθούν = ;

Λύση:

Δηλαδή ζητάμε την πιθανότητα 1 πακέτο να αντικατασταθεί, δηλαδή την πιθ. 1 πακέτο να περιέχει ≥ 2 ελαττ. λαμπτ.

Πείραμα Τύχης: Εξέταση των 10 λαμπτήρων του πακέτου

Επιτυχία = Λειτουργία λαμπτήρα

$X = \#$ καλών λαμπτ. $\sim Bin(10, 0{,}99)$

$$P_{\text{ζητ.}} = P(X \le 8) = \sum_{i=0}^{8} \binom{10}{i} 0{,}99^{i} \cdot 0{,}01^{10-i} = 1 - P(X \ge 9) =$$

$$= 1 - P(X=9) - P(X=10) = 1 - \binom{10}{9} 0{,}99^{9}\, 0{,}01^{1} - \binom{10}{10} 0{,}99^{10} \cdot 0{,}01^{0}$$

⑤ Άσκηση

2 αεροπλάνα

Αεροπλάνο A → Δικινητ.

—//— B → Τετρακινητ.

Όλοι οι κινητ. είναι του ίδιου τύπου και λειτουργούν ανεξ.

P(κινητ. βλάβη στην πτήση) = p

Αεροπλάνο δεν έχει προβλ. στην πτήση ⟺ κατά τη διάρκεια της πτήσης λειτουργ. χωρίς βλάβη τουλάχ. οι μισοί κινητήρες του.

Για ποιες τιμές του p

$$P\begin{pmatrix}\text{όχι προβλ.}\\ \text{πτήσης το A}\end{pmatrix} > P\begin{pmatrix}\text{όχι προβλ.}\\ \text{πτήσης το B}\end{pmatrix} \; ;$$

Λύση:

X_A = # υν. του A που δεν παρουσιάζουν πρόβλημα

X_B = # υν. του B — // —

$X_A \sim Bin(2, 1-p)$ και X_B $Bin(4, 1-p)$

$p = ;$ $P(X_A \geq 1) > P(X_B \geq 2)$

$P(X_A = 1) + P(X_A = 2) > P(X_B = 2) + P(X_B = 3) + P(X_B = 4)$

$\binom{2}{1}(1-p)^1 p^1 + \binom{2}{2}(1-p)^2 p^0 > \binom{4}{2}(1-p)^2 p^2 + \binom{4}{3}(1-p)^3 p^1 + \binom{4}{4}(1-p)^4 p^0$

...