14.04.10 17ο μάθημα

Ειδικές Διακριτές Κατανομές

① Ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli

$X_1, X_2, X_3, \dots$ $\qquad P(X_i = 1) = p$ (επιτ.)

$\qquad P(X_i = 0) = 1-p$ (αποτ.)

X = # επιτυχιών σε 1 δοκιμή

Y = # επιτυχιών σε n δοκιμές

W = # δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία

Z = # δοκιμών μέχρι την n-οστή επιτυχία

$X \sim \text{Bernoulli}(p) \quad P(X=i) = p^i (1-p)^{1-i}, \quad i = 0,1$

$Y \sim \text{Bin}(n,p) \quad P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0,1,\dots,n$

$E[X] = p$

$Var[X] = p(1-p)$

$E[Y] = np$

$Var[Y] = np(1-p)$

② Η γεωμετρική Geom(p) κατανομή

$W \in \{1,2,3,\dots\}$

$P(W=i) = P(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1,2,\dots$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(W=i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}, \quad |t|<1$$

$$E[W] = \sum_{i=1}^{\infty} i\, P(W=i) = \sum_{i=1}^{\infty} i p (1-p)^{i-1} = p \sum_{i=1}^{\infty} i (1-p)^{i-1} = *$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} i\, t^{i-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$* = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$Var[W] = E[W^2] - E^2[W]$

$E[W^2] = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 P(W=i) = p \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (1-p)^{i-1} = *$

$\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} i\, t^{i-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \overset{\cdot t}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} i t^i = \frac{t}{(1-t)^2}$

$\overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 t^{i-1} = \frac{1\cdot(1-t^2) + 2t(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1-t^2}{(1-t)^4} = \frac{1+t}{(1-t)^3}$

$* = p \frac{1+1-p}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}$

οπότε $Var[W] = E[W^2] - E^2[W] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

$W \sim \text{Γεωμ}(p) \quad P(W=i) = p(1-p)^{i-1}, \; i = 1, 2, \dots$

$E[W] = \frac{1}{p}$

$Var[W] = \frac{1-p}{p^2}$

③ Η Αρνητική Διωνυμική NegBin(n, p)

$Z \in \{n, n+1, n+2 \dots\}$

$\{Z=i\} \leftrightarrow \overbrace{0001100100 1\dots001}^{i}$

$\uparrow$ i δοκιμή

ακολουθία με n άσσους "1" και $i-n$ μηδενικά "0", με "1" τελευταία στην (i-οστή) θέση

με πιθανότητα $p^n (1-p)^{i-n}$

Πόσες τέτοιες αντιστοιχούν στο $\{Z=i\}$; $= \binom{i-1}{n-1}$ διαλέγω από τις $i-1$ θέσεις (όλες εκτός της τελευταίας που είναι πάντα άσσος επιτυχία) που θα μπουν οι $n-1$ επιτυχίες!

$i=5 \quad \{Z=i\} \leftrightarrow 00111$

$n=3 \quad 11001$

10101

01101

$\dots$

$P(Z=i) = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}, \; i = n, n+1, \dots$

(για $n=1$ έχω τη γεωμετρική)

$\binom{n}{i} = \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}$

$E[Z] = \sum_{i=1}^{\infty} i \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n} = n p^n \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i}{n} (1-p)^{i-n} =$

$$= \frac{np^n}{n!}\sum_{i=n}^{\infty} i(i-1)(i-2)\dots(i-n+1)(1-p)^{i-n} = *$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \overset{d^n/dt^n}{\Longrightarrow} \sum_{i=n}^{\infty} i(i-1)(i-2)\dots(i-n+1)\,t^{i-n} = n!\,\frac{1}{(1-t)^{n+1}}$$

$$* = \frac{np^n}{n!}\cdot\frac{n!}{(1-(1-p))^{n+1}} = \frac{n}{p}$$

$Z \sim NegBin(n,p)$ $\quad P(Z=i) = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}, \quad i = n, n+1, \dots$

$$E[Z] = \frac{n}{p}$$

$$Var[Z] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

(4) Η κατανομή Poisson (λ)

Ακολουθία δοκιμών Bernoulli $X_1, X_2, \dots$

Παρατηρώ n δοκιμές με πιθ. επιτυχίας p

ώστε $\begin{matrix} n\to\infty \\ p \to 0 \end{matrix}$ με $np \to \lambda$

$Y_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$ ← Να μελετηθεί για $n\to\infty$

$$P(Y_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = i) = \frac{\lambda^i}{i!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-i)!\,n^i}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-i}}_{\to 1} =$$

$$= \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{i}} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$$

$$\downarrow 1$$

Η κατανομή με $P(i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, $i = 0, 1, \dots$ λέγεται κατανομή Poisson με ρυθμό λ

Κατανομή Poisson ακολουθούν πολλά φυσικά φαινόμενα

1. # τυπογραφικών λαθών ανά σελίδα
2. # τροχαίων ατυχημάτων ανά μέρα
3. # σεισμών σε γεωγραφική περιοχή

$X \sim Poisson(\lambda)$

$E[X] = \lambda$

$Var[X] = \lambda$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i\,p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\lambda^{j+1}}{j!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^{j+1}}{j!} + e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$