03.03.10 6^o μάθημα

Ασκήσεις - Εφαρμογές

① Επιλογή Σφαιριδίων από Κάλπη

Τα 11 σφαιρίδια ΠΑΝΤΑ θα είναι διακεκριμένα!

5Α+6Μ (άσπρες, μαύρες) επιλογή 3, χωρίς επανάθεση

P(∃ ακριβώς 1 μαύρο μεταξύ των επιλεχθέντων) = ;

δυνατές → $\underline{11}\ \underline{10}\ \underline{9}$

ευνοϊκές → $\underset{M\,A\,A}{6\,5\,4}$, $\underset{A\,M\,A}{5\,6\,4}$, $\underset{A\,A\,M}{5\,4\,6}$

Λύση: α) Με διατάξεις $P = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{6\cdot5\cdot4+5\cdot6\cdot4+5\cdot4\cdot6}{11\cdot10\cdot9} = \frac{360}{990} = \frac{4}{11}$

Δχ: Διατεταγμένες 3-άδες σφαιριδίων

β) Με συνδυασμούς $P = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\binom{5}{2}\binom{6}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{6}{1}}{\frac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{4}{11}$

Δ.χ: Συνδυασμοί 11 ανά 3 σφαίρες

π.χ. Συνδυασμός $\{M_1, A_2, A_4\} \xrightarrow{3!\ \text{διατάξεις}} (M_1,A_2,A_4), (M_1,A_4,A_2), (A_4,M_1,A_2)$ ...

② Το πρόβλημα των Γενεθλίων

n άτομα

P(τουλ. 2 από αυτά τα έχουν γεν. την ίδια μέρα) = A = ;

Ποιο είναι το ελάχιστο n ώστε $P > \frac{1}{2}$; 23

$n=2 \leadsto \frac{1}{365}$

$n=3 \leadsto$ περίπου τριπλασιάζεται η πιθανότητα

Λύση: $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\text{όλα γεν σε διαφ. μέρες}) = 1 - \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} =$

Είναι διαφορετικό:

Αγγ	Βάσω	Γιώργος
8 Φεβ	2 Ιου	3 Μαρ
3 Μαρ	2 Ιου	8 Φεβ

$$= 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdots(365-n+1)}{(365)^n}$$

n	P
20	0.411
23	0.507
30	0.706
40	0.891
50	0.970

Για $n=23$ είναι $P \simeq 0.5073$.

23 άτομα → $\binom{23}{2} = \frac{23\cdot22}{2} = 23\cdot11 = 253$ ζεύγη $\cdot \frac{1}{365} > \frac{1}{2}$ πιθ. γεν την ίδια μέρα

Δεν είναι αυτή η πιθανότητα! Πρέπει να εφαρμόσω αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

Γενικά: Κάλπη με όμοια ή όχι αντικείμενα
Εξαγωγή αντικειμένων χωρίς επανάθεση
Μπορώ να χρησιμοποιήσω συνδυασμούς

③ Χέρια Πόκερ

Τράπουλα με 52 χαρτιά

Εξαγωγή 5 χαρτιών = χέρι πόκερ □ □ □ □ □

Καρέ ≡ 4 φύλλα ίδιου αριθμού και 1 διαφορετικό

Φουλ ≡ 3 ίδια και 2 ίδια

P(φουλ) = ;

P(καρέ) = ;

Λύση: Και ο διατεταγμένος και ο μη διατεταγμένος δ.χ. είναι σωστοί και οι δύο κάνουν τα αποτελέσματα ισοπίθανα. Άρα, μπορώ να δουλέψω και με διατάξεις και με συνδυασμούς!

Για καρέ $\boxed{K^{\diamondsuit}}$ $\boxed{A^{\spadesuit}}$ $\boxed{K^{\clubsuit}}$ $\boxed{K^{\spadesuit}}$ $\boxed{K^{\heartsuit}}$

1. Με διατάξεις $P(\text{καρέ}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$

Μια ευνοϊκή γίνεται σε στάδια: 1° επιλογή αριθμού 4 φύλλων → 13
2° επιλογή αριθμού 1 φύλλου → 12
3° επιλογή χρώματος (σχεδίου) 4 φύλλων → 1
4° επιλογή χρώματος (σχεδίου) 1 φύλλου → 4 (καρό, τρίφυλλο, καρδιά, μπαστούνι)
5° τοποθέτηση σε σειρά → 5!

Άρα από πολ/κή αρχή #ευνοϊκών = $13 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5!$

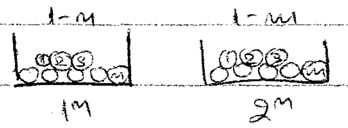
2. Με συνδυασμούς $P(\text{καρέ}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$

Για φουλ αντίστοιχα:

1. Με διατάξεις : $P(\text{φουλ}) = \dfrac{13\cdot 12\binom{4}{3}\binom{4}{2}5!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}$

2. Με συνδυασμούς : $P(\text{φουλ}) = \dfrac{13\cdot 12\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$

④ Άσκηση: Πείραμα τύχης: Επιλογή 2 αριθμών: 1 από την 1η
1 από την 2η



$P(\underbrace{\text{αριθμός κάλπης } 1 < \text{αριθμός κάλπης } 2}_{A}) = ;$

$P(\text{άθροισμα αριθμών} = k) = ;$

Λύση: Δ.χ.: $S = \{(i,j) : 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$

$|S| = n\cdot m$

Πρέπει να προσέξω αν $n > m$ ή $n < m$!

Έστω $n > m$: τότε $|A| = \underset{\substack{\text{βγάζω}\\ \text{το } 1\\ \text{απ' την } 1η}}{(m-1)} + \underset{\substack{\text{βγάζω}\\ \text{το } 2\\ \text{απ' την } 1η}}{(m-2)} + \dots + \underset{\substack{\text{βγάζω}\\ \text{το } m\\ \text{απ' την } 1η}}{1} = \dfrac{(m-1)m}{2}$

Άρα $P(A) = \dfrac{|A|}{|S|} = \dfrac{\frac{(m-1)m}{2}}{n\cdot m} = \dfrac{m-1}{2n}$

Το αντίστοιχο για $n < m$

Next time: ανοίγω τα 52 φύλλα μιας τράπουλας στη σειρά που βγαίνει άσσος, ποια η πιθανότητα το επόμενο φύλλο να είναι άσσος μπαστούνι ή δύο καρό;