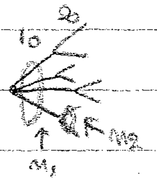
01.03.10 5° μάθημα

Στοιχεία Συνδυαστικής για Πιθανότητες

① Πολλαπλασιαστική αρχή

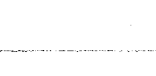
Πείραμα τύχης r σταδίων
1^o στάδιο ⇝ n_1 επιλογές
2^o στάδιο ⇝ n_2 επιλογές
⋮ ⋮
r^o στάδιο n_r επιλογές



Τότε το πείραμα τύχης έχει συνολικά $n_1 n_2 \dots n_r$ αποτελέσματα

② Μετάθεση

Μετάθεση ενός συνόλου $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ είναι κάθε τοποθέτηση των $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ σε σειρά



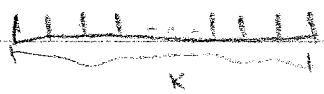
μεταθέσεων n στοιχείων $= n!$

③ Διάταξη

Διάταξη του $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ n ανά k λέγεται κάθε διατεταγμένη k-άδα στοιχείων του

↙ ↘

απλή (χωρίς επανάληψη) | επαναληπτική



επαναλ. διατάξεων n ανά $k = n^k$

διατάξεων n ανά $k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

④ Συνδυασμός

Συνδυασμός του $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ n ανά k είναι κάθε μη-διατεταγμένη συλλογή k στοιχείων του.

αυτός ✓ ✓ με επανάληψη ✓ γενικά δεν εμφανίζεται σε προβλήματα πιθανοτήτων!!! γιατί τα κάνουν μη ισοπίθανα τα δειγματικά σημεία

συνδ. n ανά k = ; # επαναλ. συνδ. n ανά k = ;

1 συνδ. n ανά k ⇝ $k!$ διατάξεις n ανά k
$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ (βάζοντας τα στοιχεία σε σειρά)

Το διπλανό επιχείρημα χαλάει για επαναλ. συνδυασμούς
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ $n=3$, $k=2$
$\{\omega_1, \omega_2\} \to (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1)$
$\{\omega_1, \omega_3\} \to (\omega_1, \omega_3), (\omega_3, \omega_1)$
$\{\omega_1, \omega_1\} \to (\omega_1, \omega_1)$
Δεν πιάνει!

$$(\#\text{συνδ } n \text{ ανά } k) \times (k!) = \#\text{διατ. } n \text{ ανά } k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\Rightarrow \#\text{συνδ. } n \text{ ανά } k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\#\text{επαναλ. συνδ. } n \text{ ανά } k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

(χωρίς απόδειξη)

⑤ (Αντι) Παράδειγμα

Στη ρίψη δύο όμοιων ζαριών (= Πείραμα Τύχης) ο "φυσικός" δειγματικός χώρος (: ο δειγμ. χώρος που βλέπουμε όχι απαραίτητα σωστός) είναι όλοι οι επαν. συνδ. 6 ανά 2 του $\{1, 2, \ldots, 6\}$ αλλά ο "σωστός" δειγματικός χώρος (: ο δ.χ. στον οποίο όλα τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα) είναι όλες οι διατάξεις με επαναλ. 6 ανά 2.

⑥ Λόττο

Πείραμα Τύχης: Κάλπη με 49 σφαίρες $\{1, 2, \ldots, 49\}$ κι επιλέγονται 6 (χωρίς επανάθεση)

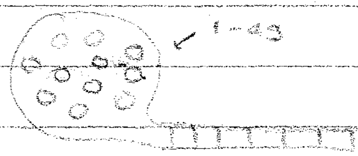
Κερδίζω "6-άρι" αν βρω και τα 6
"5-άρι" αν βρω και τα 5 κλπ

Πιθανότητα να πιάσεις το "εξάρι" : $\frac{1}{\binom{49}{6}}$ (διαισθητικά)

"Σωστός" Δ.χ. που κάνει όλα τα αποτελέσματα ισοπίθανα είναι το σύνολο των διατάξεων 49 ανά 6 του $\{1,2,\dots,49\}$

$P(\text{εξάρι}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$ = μεταθέσεις των 6 αριθμών του δελτίου $= 6!$ (δε μ' ενδιαφέρει η σειρά)

Διατάξεις 49 ανά 6 $= \frac{49!}{(49-6)!}$



$$= \frac{6!}{\frac{49!}{(49-6)!}} = \frac{1}{\frac{49!}{6!(49-6)!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Ο "φυσικός" δειγματικός χώρος που έχει ως αποτελέσματα συνδυασμούς με 6 στοιχεία είναι επίσης "σωστός". (όλα ισοπίθανα)
Σε κάθε αποτέλεσμα του φυσ.δ.χ. αντιστοιχεί ίδιος αριθμός αποτελεσμάτων του "σωστού"

$P(\text{πεντάρι}) = \frac{?}{\frac{49!}{(49-6)!}}$

? = Διάταξη με 5 αριθμούς από τους 6 συμπεριλαμβάνοντας του δελτίου μου και 1 αριθμός εκτός δελτίου. Σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή αριθμού εκτός δελτίου : $(49-6)=43$ επιλογές

2ο στάδιο: Επιλογή αριθμών από το δελτίο : $\binom{6}{5}$ επιλογές

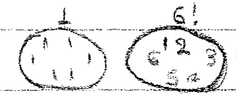
3ο στάδιο: Βάζω 6 αριθμούς σε σειρά : $6!$ επιλογές

$\binom{6}{5}$

$$= \frac{43 \cdot 6 \cdot 6!}{\frac{49!}{(49-6)!}} = \frac{\binom{43}{1}\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}}$$

Η ίδια λύση βγαίνει δουλεύοντας στο "φυσικό" χώρο (με συνδυασμούς)

⑦ Λόττο με επανάθεση $\frac{1}{49^6}$



μπορεί να βγει και 123456 / 213456 ... άρα $\frac{6!}{49^6}$

Πείραμα τύχης: Επιλογή 6 αριθμών από $\{1,\dots,49\}$ με επαναθέσεις

Δελτίο: Επιλογή 6 αριθμών με επανάληψη

Σωστός δ.χ. = Σύνολο διατάξεων 49 ανά 6 με επανάληψη

ισοπίθανων δειγμ. σημείων $= 49^6$

Φυσικός δ.χ. = Σύνολο συνδυασμών 49 ανά 6 με επανάληψη

Όχι ισοπίθανα δειγμ. σημεία !!!

$$\overset{\text{κάλπικο}}{K}, N_1, N_2, \ldots \overset{\text{κανονικά}}{N_{n-1}}$$

Ⓑ Άσκηση: Κάλπη που έχει n νομίσματα $\begin{pmatrix} 1 \text{ κάλπικο} \\ n-1 \text{ κανονικά} \end{pmatrix}$ επιλέγονται κ χωρίς επανάθεση. P(περιέχεται σ'αυτά το κάλπικο) = ;

Το ίδιο πρόβλημα με τα κλειδιά και την πόρτα (Χαραλαμπίδης)

Λύση: Δ.χ. με διατάξεις $P = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{k \cdot \binom{n-1}{k-1}(k-1)!}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{k \frac{(n-1)!}{\cancel{(k-1)!}(\cancel{n-k})!}\cancel{(k-1)!}}{\frac{n!}{(\cancel{n-k})!}} = \frac{k}{n}$

1° στάδιο: Διαλέγω σε ποια θέση θα βάλω το κάλπικο $\to k$

2° στάδιο: Διαλέγω $k-1$ από τα $n-1$ κανονικά $\to \binom{n-1}{k-1}$

3° στάδιο: Βάζω τα επιλεχθέντα $k-1$ κανονικά σε σειρά $\to (k-1)!$

Απο πολ/κη αρχή $k\binom{n-1}{k-1}(k-1)!$ ευνοϊκές