1. Μετασχηματισμοί πολυδιάστατων τυχαίων μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε ότι στη μελέτη τυχαίων μεταβλητών στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα αντιμετωπίζουμε συχνά το εξής πρόβλημα. Έχουμε

- X τυχαία μεταβλητή με τιμές σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και πυκνότητα f_X,
- $g : I \to \mathbb{R}$ μια 1-1 διαφορίσιμη συνάρτηση με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$,
- θέτουμε $Y := g(X)$,

και ζητάμε να περιγράψουμε την κατανομή της Y. Ισχύει ότι η Y έχει πυκνότητα, και μάλιστα δίνεται από τον τύπο

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)| & \text{αν } y \in g(I), \\ 0 & \text{αν } y \in \mathbb{R}\backslash g(I). \end{cases}.$$

Θέλουμε να κάνουμε το ίδιο και σε περισσότερες διαστάσεις. Υπενθυμίζουμε ότι ο αν $V \subset \mathbb{R}^m$ και $S : V \to \mathbb{R}^n$ είναι μια συνάρτηση που γράφεται

$$S(x_1, x_2, \dots, x_m) = (S_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, S_n(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

και η οποία είναι διαφορίσιμη στο $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in V$ τότε ο Ιακωβιανός πίνακας της S στο x είναι ο

$$J_S(x) := \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le m}.$$

Είναι ένας $n \times m$ πίνακας. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία συντεταμένη της S και κάθε στήλη σε μια μεταβλητή της S. Όταν $m = n$ τότε Ιακωβιανή της S στο x λέμε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα $J_S(x)$.

Έχουμε

- $X = (X_1, \dots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές σε ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και πυκνότητα f_X,
- $T : U \to \mathbb{R}^n$ απεικόνιση 1-1 διαφορίσιμη με Ιακωβιανή που δεν μηδενίζεται στο U, και
- $Y = T(X)$.

Τι κατανομή ακολουθεί η Y; Συμβολίζουμε με $J_{T^{-1}}(y)$ τον Ιακωβιανό πίνακα της στο $y \in T(U)$ (αυτός ορίζεται λόγω των υποθέσεων).

Θεώρημα 1. Η $Y = T(X)$ έχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(T^{-1}(y))|\det J_{T^{-1}}(y)| & \text{αν } y \in T(U), \\ 0 & \text{αν } y \in \mathbb{R}^n\backslash T(U). \end{cases} \tag{1}$$

Έκδοση του θεωρήματος υπάρχει και για την περίπτωση που η T είναι k προς 1 (αντί 1 προς 1) όπου $k \geq 2$ ακέραιος, αλλά δεν την διατυπώνουμε.

Παράδειγμα 1. Έστω $a, b, \lambda > 0$ και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ και $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$. Θα δείξουμε ότι το ζευγάρι

$$(U, V) := \left(\frac{X}{X+Y}, X+Y\right),$$

έχει πυκνότητα και θα την προσδιορίζουμε.

Ο μετασχηματισμός $T : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, 1) \times (0, \infty)$ με $T(x, y) := (x/(x + y), x + y)$ είναι 1-1 και επί, και $(U, V) = T(X, Y)$. Έπειτα $T^{-1}(u, v) = (uv, v(1 - u))$, και ο T^{-1} έχει Ιακωβιανό πίνακα

$$J_{T^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του ισούται με v. Άρα με βάση το Θεώρημα 1,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u, v))|\det J_{T^{-1}}(u, v)| = ... = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}(1-u)^{b-1}v^{a+b-1}e^{-\lambda v}\mathbf{1}_{u\in(0,1)}\,\mathbf{1}_{v>0}.$$

Επειδή αυτή η πυκνότητα είναι γινόμενο $g(u)h(v)$, έπεται ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 και την σχέση

$$B(a,b) := \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

υπολογίζουμε τις πυκνότητες των U, V, και προκύπτει ότι

$$U \sim \text{Βήτα}(a,b), \quad V \sim \Gamma(a+b,\lambda).$$

Ασκήσεις

(1) Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$.
(α) Να δειχθεί ότι η από κοινού πυκνότητα των τυχαίων μεταβλητών

$$U := X + Y,$$
$$V := X - Y$$

ισούται με

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

για κάθε $u, v \in \mathbb{R}$.

(β) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή $N(0,1)$ να δειχθεί ότι οι $X+Y, X-Y$ είναι ανεξάρτητες, και καθεμία ακολουθεί την κατανομή $N(0,2)$.

(γ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή εκθετική με παράμετρο $\lambda > 0$, ποιά είναι η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X-Y$; Είναι οι $X+Y, X-Y$ ανεξάρτητες; Τι κατανομή ακολουθεί καθεμιά τους;

(δ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή ομοιόμορφη στο $(0,1)$, ποιά είναι η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X-Y$; Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο είναι θετική;

(2) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, με καθεμιά τους να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ,

(α) Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X/Y$. Είναι ανεξάρτητες;

(β) Να βρεθεί η πυκνότητα της X/Y.

(3) Έστω $a, b, c > 0$, και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με την X να ακολουθεί την κατανομή Βήτα(a,b) και την Y να ακολουθεί την Βήτα$(a+b,c)$. Να δειχθεί ότι η XY ακολουθεί την Βήτα$(a, b+c)$.

Λύσεις

(1) (α) Για τον μετασχηματισμό $T(x,y) := (x+y, x-y)$, έχουμε $(U,V) = T(X,Y)$, και $T^{-1}(u,v) = ((u+v)/2, (u-v)/2)$. Ο $J_{T^{-1}}$ έχει ορίζουσα

$$\det J_{T^{-1}}(u,v) = -1/2.$$

Άρα με βάση γνωστό θεώρημα, έχουμε

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|\det J_{T^{-1}}(u,v)|,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

(β) Στον τύπο από το (α), χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των X, Y, και αντικαθιστώντας την πυκνότητα τους, βρίσκουμε

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\, e^{-\frac{u^2}{4}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\, e^{-\frac{v^2}{4}}$$

το οποίο είναι το γινόμενο $g(u)g(v)$ με την g να είναι η πυκνότητα της $N(0,2)$. Έτσι προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

(γ) Όμοια όπως στο (β), βρίσκουμε

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda(\frac{u+v}{2})}\mathbf{1}_{\frac{u+v}{2}>0}\lambda e^{-\lambda(\frac{u-v}{2})}\mathbf{1}_{\frac{u-v}{2}>0} = \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u+v>0}\mathbf{1}_{u-v>0}$$
$$= \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u>0,-u<v<u}.$$

Βοηθάει να κάνει κανείς ένα σχήμα για το χωρίο $\{(u,v) : u+v>0, u-v>0\}$. Οι περιθώριες είναι

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,dv = \begin{cases} 0 & \text{αν } u \le 0 \\ \frac{\lambda^2}{2}\int_{-u}^{u} e^{-\lambda u}\,dv = \lambda^2 u e^{-\lambda u} & \text{αν } u > 0 \end{cases} = \lambda^2 u e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u>0}$$

και όμοια (παίρνοντας περιπτώσεις $v \ge 0, v < 0$) βρίσκουμε

$$f_V(v) = \frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda|v|}$$

για κάθε $v \in \mathbb{R}$. Προφανώς $f_{U,V}(u,v) \ne f_U(u)f_V(v)$, οπότε οι U,V δεν είναι ανεξάρτητες.

(2) (α) Για τον μετασχηματισμό[1] $T(x,y) := (x+y, x/y)$, έχουμε $T^{-1}(u,v) = (uv/(v+1), u/(v+1))$ και η Ιακωβιανή του T^{-1} είναι η

$$\det J_{T^{-1}}(u,v) = -\frac{u}{(v+1)^2}.$$

Άρα το ζευγάρι $(U,V) = T(X,Y)$ έχει πυκνότητα

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|J_{T^{-1}}(u,v)| = \lambda^2 u e^{-\lambda u}\frac{1}{(v+1)^2}\mathbf{1}_{u,v>0}.$$

Επειδή η πυκνότητα $f_{U,V}$ γράφεται ως γινόμενο $g(u)h(v)$, έπεται ότι οι U,V είναι ανεξάρτητες.

(β)

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,du = \ldots = \frac{1}{(v+1)^2}\mathbf{1}_{v>0}.$$

(3) **Πρώτος τρόπος**. Η απεικόνιση $T(x,y) := (xy, y)$ έχει $T^{-1} = (u/v, v)$ και η Ιακωβιανή της T^{-1} είναι $1/v$. Άρα το ζευγάρι $(U,V) := T(X,Y) = (XY,Y)$ έχει πυκνότητα

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u/v,v)\frac{1}{|v|} = f_X(u/v)f_Y(v)\frac{1}{|v|}$$

και άρα

$$f_{XY}(u) = f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u/y)f_Y(y)\,\frac{1}{|y|}\,dy.$$

Οι f_X, f_Y είναι μη μηδενικές μόνο στο $(0,1)$, και έτσι προκύπτει ότι για $u \notin (0,1)$ ισχύει $f_{XY}(u) = 0$, γιατί για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τουλάχιστον ένας από τους $u/y, y$ θα είναι εκτός του $(0,1)$. Για $u \in (0,1)$ το πιο πάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\substack{0<u/y<1\\0<y<1}} f_X(u/y)f_Y(y)\,\frac{1}{y}\,dy = \int_u^1 \frac{1}{y}\frac{1}{B(a,b)}\left(\frac{u}{y}\right)^{a-1}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{b-1}\frac{1}{B(a+b,c)}y^{a+b-1}(1-y)^{c-1}\,dy$$
$$= \frac{1}{B(a,b)}\frac{1}{B(a+b,c)}u^{a-1}\int_u^1 (y-u)^{b-1}(1-y)^{c-1}\,dy.$$

[1] Θεωρούμε πεδίο ορισμού του T το $(0,\infty)\times(0,\infty)$ γιατί εκεί παίρνει τιμές στο ζευγάρι (X,Y).

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, εισάγουμε νέα μεταβλητή, την s, θέτοντας $y = (1-u)s + u$, ώστε να προκύψει ολοκλήρωμα με άκρα 0, 1, και μετά από υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$f_{XY}(u) = \frac{1}{B(a, b+c)} u^{a-1}(1-u)^{b+c-1}.$$

Δεύτερος τρόπος. Με τρικ, χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 1. Παίρνουμε τρεις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_3 ώστε $X_1 \sim \Gamma(a, \lambda), X_2 \sim \Gamma(b, \lambda), X_3 \sim \Gamma(c, \lambda)$. Με βάση το Παράδειγμα 1 η X έχει την ίδια κατανομή με την $Z := X_1/(X_1 + X_2)$ και η Y την ίδια κατανομή με την $W := (X_1 + X_2)/(X_1 + X_2 + X_3)$. Επιπλέον, στο Παράδειγμα 1 είδαμε ότι οι $Z, X_1 + X_2$ είναι ανεξάρτητες, άρα (αφού και η X_3 είναι ανεξάρτητη από τις X_1, X_2) οι Z, W είναι ανεξάρτητες. Επομένως το ζευγάρι (X, Y) έχει την ίδια κατανομή με το (Z, W). Άρα η XY έχει την ίδια κατανομή με την $ZW = X_1/(X_1 + X_2 + X_3)$, η οποία με βάση το Παράδειγμα 1 έχει κατανομή $B(a, b + c)$.