26º Μάθημα

24/4/13

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

① Ορισμός

- (X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y)$$ ← Δεσμευμένη σ.π. της X δοθ. Y=y

$$m_{X|Y}(y) = E[X \mid Y=y] = \sum_x x P_{X|Y}(x|y) = \sum_x x P(X=x \mid Y=y)$$

↑ Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος Y=y { Αριθμός εξαρτώμενος από το y

- (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ ← Δεσμευμένη σ.π.π. της X δοθ. Y=y

$$m_{X|Y}(y) = E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

↑ Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος Y=y

② Ιδιότητες της $E[X|Y=y]$

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες της $E[X]$

Π.χ.

$$E[aX+b|Y=y] = a\,E[X|Y=y]+b$$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big| Y=y\Big] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|Y=y]$$

$$X \geq 0 \implies E[X|Y=y] \geq 0$$

Προσοχή!!! $E[X|Y+Z=w] \neq E[X|Y=w]+E[X|Z=w]$

③ Παράδειγμα

$X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(n,p)$

X: # επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli $1,2,\dots,n$ με πιθανότητα επιτυχίας p

Y: # επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli $n+1,n+2,\dots,2n$ με πιθανότητα επιτυχίας p

$$E[X|\underbrace{X+Y}_{Z}=m] = ;$$

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ \cdots\ n}_{\#\text{ επιτ. στις πρώτες } n \text{ δοκ.}}\ \underbrace{(n+1)\ \cdots\ 2n}_{\#\text{ επιτ. στις τελευταίες } n \text{ δοκιμές}}$$

επιτ. στις πρώτες n δοκ. — X # επιτ. στις τελευταίες n δοκιμές — Y

$$Z = X+Y \sim Bin(2n,p)$$

$$E[X|X+Y=m] = E[X|Z=m] = \sum_{x} x\,P_{X|Z}(x|m) =$$

$$= \sum_{x=0}^{m} x\,P(X=x|Z=m) = \sum_{x=0}^{m} x\,\frac{P(X=x,Y=m-x)}{P(Z=m)}$$

$$= \sum_{x=0}^{m} x\,\frac{\binom{n}{x}\cancel{p^{x}}\cancel{(1-p)^{n-x}}\binom{n}{m-x}\cancel{p^{m-x}}\cancel{(1-p)^{n-m+x}}}{\binom{2n}{m}\cancel{p^{m}}\cancel{(1-p)^{2n-m}}}$$

$$= \sum^{m}$$

$$= \sum_{x=\cancel{0},1}^{m} x \, \frac{\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} \overset{\text{Hypergeom}(n,2n,m)}{=} \frac{m}{2}$$

$$= \sum_{x=1}^{m} \frac{\cancel{x}\,\frac{n}{\cancel{x}}\binom{n-1}{x-1}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}}$$

$$\underset{y=x-1}{=} \frac{n}{\binom{2n}{m}} \sum_{y=0}^{m-1} \binom{n-1}{y}\binom{n}{m-1-y} \overset{\text{Τύπος Cauchy}}{=} \binom{2n-1}{m-1}$$

$$Z = X+Y \sim Bin(2n,p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[X \mid X+Y=m] = \frac{n}{\binom{2n}{m}} \binom{2n-1}{m-1}$$

$$= \frac{n}{\frac{2n}{m}\cancel{\binom{2n-1}{m-1}}} \cancel{\binom{2n-1}{m-1}} = \frac{m}{2}$$

④ Παράδειγμα

(X, Y) συνεχής με δ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}$

$x, y > 0$

$E[X|Y=y] = ;$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ ← Δεσμευμένη σ.π.π. της $X|Y=y$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}\,dx$$

$$= e^{-y} \underbrace{\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{y}}_{=\lambda} e^{-\frac{x}{y}}\,dx}_{1}$$ → σ.π.π. της $Exp\left(\frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{y} = \lambda$

$f_Y(y) = 1 \cdot e^{-1y}$, $y > 0$ $\quad Y \sim Exp(1)$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{y}} \cancel{e^{-y}}}{\cancel{e^{-y}}} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}, \quad x, y \geq 0$$

$(X|Y=y) \sim Exp\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow E[X|Y=y] = y$

Διαφορετικά

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x}{Y}}\,dx = y$$

5 Δεσμευμένη μέση τιμή δοθείσης τ.μ.

$m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y]$: $\underbrace{\text{Δεσμευμένη μέση τιμή της } X \text{ δοθέντος ότι } Y=y}_{\text{αριθμός εξαρτ. από το } y}$

$E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$: $\underbrace{\text{Δεσμευμένη μέση τιμή της } X \text{ δοθείσης της } Y}_{\text{τ.μ. συνάρτηση της } Y}$

6 Θεώρημα διπλής μέσης τιμής

$$E[X] = E[E[X|Y]] = E[m_{X|Y}(Y)] = \begin{cases} \sum_{y} E[X|Y=y]\, P_Y(y) & , Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\uparrow \atop m_{X|Y}(y)}{E[X|Y=y]}\, f_Y(y)\, dy & , Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

7 Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης: ◦ Ρίχνω ζάρι
◦ Ρίψη νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι

$X = \#$ κεφαλιών στις ρίψεις

$E[X] = ;$

$P[X=x]$ ⟷ Δύσκολο

$E[X] = \sum_x x P[X=x]$

Y = αριθμός που έφερε το ζάρι

$$E[X] = E[E[X|Y]]$$
$$= \sum_{y=1}^{6} E[X|Y=y]\,P[Y=y] \quad (1)$$

Όμως $P[Y=y] = \frac{1}{6}$, $y = 1, 2, \dots, 6$ (2)

$(X|Y=y) \sim Bin(y, \frac{1}{2})$

$\Downarrow$

$E[X|Y=y] = y \cdot \frac{1}{2} = \frac{y}{2}$ (3)

Άρα από (1), (2), (3) $\Rightarrow E[X] = \sum_{y=1}^{6} \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{12} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$

⑧ Παράδειγμα (Μέση Τιμή Γεωμετρικής)

Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας P

$X = \#$ δοκιμών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία

$X \sim Geom(p)$

$$P(X=x) = (1-p)^{x-1} \cdot p \quad , x \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \cdot ; = \frac{1}{p}$$

$Y =$ Αποτέλεσμα της $1^{ης}$ δοκιμής $\left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow \text{επιτυχία} \\ 0 \rightarrow \text{αποτυχία} \end{array} \right)$

$$E[X] = \sum_{y} E[X \mid Y=y] \, P[Y=y]$$

$$= \underbrace{P[Y=0]}_{1-p} \, \underbrace{E[X \mid Y=0]}_{1+E[X]} + \underbrace{P[Y=1]}_{p} \, \underbrace{E[X \mid Y=1]}_{1}$$

(Μετά από κάθε επιτυχία το πείραμα αναγεννάται)

$$= (1-p) \cdot (1+E[X]) + p \cdot 1 \iff$$

$$\iff p \cdot E[X] = 1 \iff E[X] = \frac{1}{p}$$

① Παράδειγμα

Ένας φυλακισμένος

3 πόρτες
- $1^{η}$ Άμεση Ελευθερία
- $2^{η}$ Πίσω στο κελί σε 3 μέρες
- $3^{η}$ — " — — " — 10 μέρες

Αν πίσω στο κελί, διαλέγει ξανά στην τύχη.

X = χρόνος ως την ελευθερία

$E[X] = ;$

—— ∘ ——

$$P[X=0] = \frac{1}{3}$$

$$P[X=1] = P[X=2] = 0$$

$$P[X=3] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

(Διαλέγεις πρώτα την $2^{η}$ πόρτα κ' μετά την $1^{η}$)

$$P[X=4] = P[X=5] = 0$$

$$P[X=6] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

$$P[X=30] = \dots$$

Άρα $P[X=x]$ δύσκολο

$$E[X] = \sum_x x P[X=x]$$

Έστω Y η πόρτα που διαλέγει αρχικά

$$E[X] = \sum_y E[X|Y=y]\, P[Y=y]$$

$$E[X] = \underbrace{P[Y=1]}_{1/3}\cdot\underbrace{E[X|Y=1]}_{0} + \underbrace{P[Y=2]}_{1/3}\cdot\underbrace{E[X|Y=2]}_{3+E[X]} + \underbrace{P[Y=3]}_{1/3}\,\underbrace{E[X|Y=3]}_{10+E[X]}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(3+E[X]) + \frac{1}{3}\cdot(10+E[X]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}E[X] = \frac{13}{3} \Leftrightarrow E[X] = 13$$