

Τυχαία μεταβλητή - Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

① Ορισμός

Πείραμα Τύχης $\rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\chi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) αν $\{\chi \in (a, b)\} = \{\omega \in \Omega: \chi(\omega) \in (a, b)\} \in \mathcal{A} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

• χ τ.μ. \rightarrow Αριθμητικοί χαρακτήρες πειραμ. τύχης

② Παράδειγμα

Πείραμα τύχης: Ρίψη νομισμάτος 3 φορές (δίκουο)

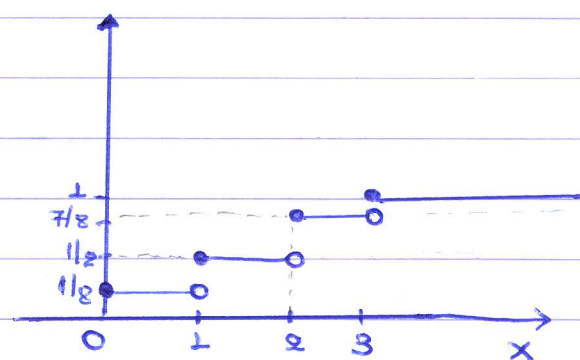
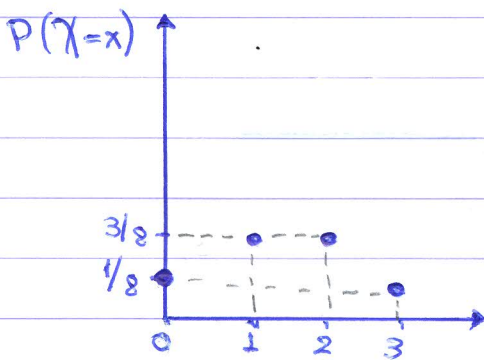
$\Omega = \{\kappa\kappa\kappa, \kappa\kappa\Gamma, \kappa\Gamma\kappa, \kappa\Gamma\Gamma, \Gamma\kappa\kappa, \Gamma\kappa\Gamma, \Gamma\Gamma\kappa, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

$\chi = \#$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

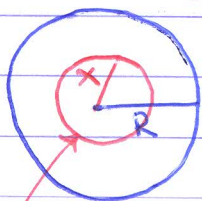
 3 2 2 1 2 1 1 0

Συνάρτηση πιθανότητας
 $P(\chi=x)$

Συνάρτηση κατανομής
 $P(\chi \leq x)$



③ Παράδειγμα



$\{X=x\}$

Πείραμα τύχης: Επιλογή τυχαίου σημείου στο δίσκο

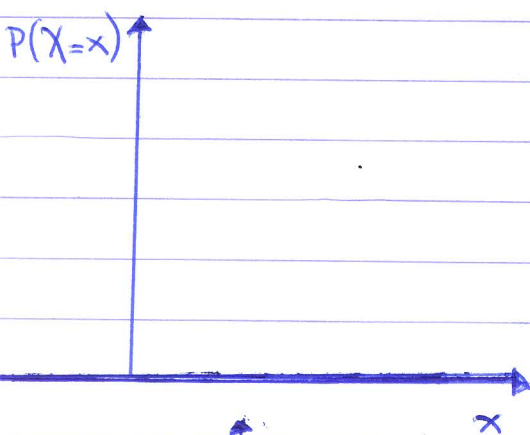
X = απόσταση επιλ. σημείου από το κέντρο

$$P(X=x) = \frac{\text{Εμβαδό ευδελ. } \{X=x\}}{\text{Εμβαδό του δ.κ.}} = \frac{0}{\pi R^2} = 0 \quad \forall x$$

$$P(X \leq x) = \frac{\text{Εμβαδό } \{X \leq x\}}{\text{Εμβαδό του δ.κ.}} = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{x^2}{R^2} \quad \underline{\underline{0 \leq x \leq R}}$$

Συνάρτηση πιθανότητας

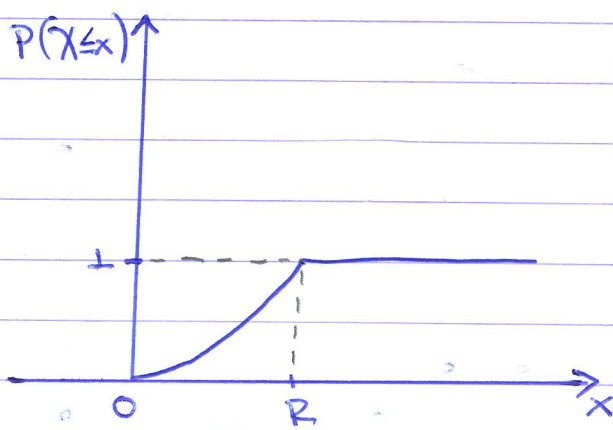
$P(X=x)$



Δεν δίνει πληροφορίες

Συνάρτηση κατανομής

$P(X \leq x)$



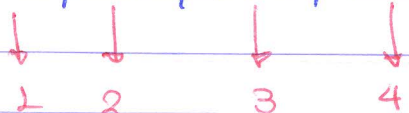
Δίνει πληροφορίες

④ Παράδειγμα

Νόμισμα που φέρνει k με πιθανότητα P

Πείραμα Τύχης: Ρίχνω το νόμισμα μέχρι $1 = k$

$$\Omega = \{ k, \Gamma k, \Gamma \Gamma k, \Gamma \Gamma \Gamma k, \dots \}$$



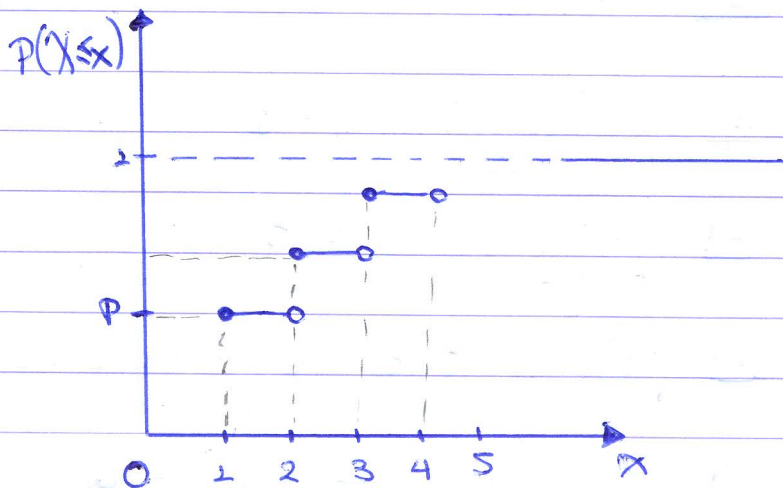
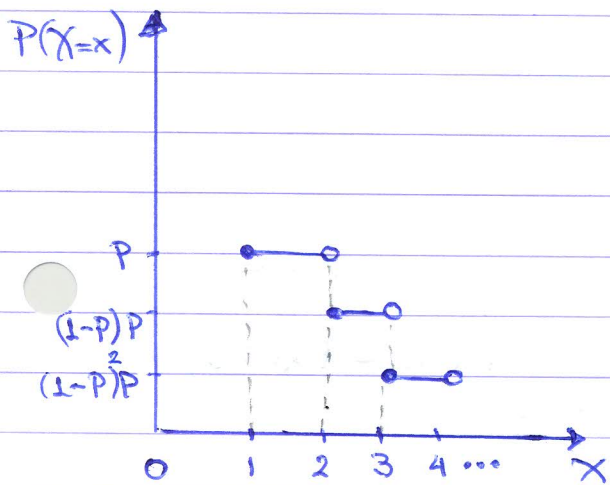
X = αριθμός ρίψης που ήρθε η k

Συνάρτηση πιθανότητας

Συνάρτηση κατανομής

$$P(X=x)$$

$$P(X \leq x)$$



4

5) Συναρτησιακή κατανομή

ορισμός

(Ω, \mathcal{A}, P) χώρος πιθανότητας $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τ.μ.

Η συναρτησιακή $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
 $x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$

λέγεται συναρτησιακή κατανομή

6) Ιδιότητες της συναρτησιακής κατανομής

1) $F_X(x)$ είναι αύξουσα

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

4) $F_X(x)$ είναι δεξιά συνεχής $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$
 $\overset{P(X \leq x_0)}{\parallel}$

5) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$

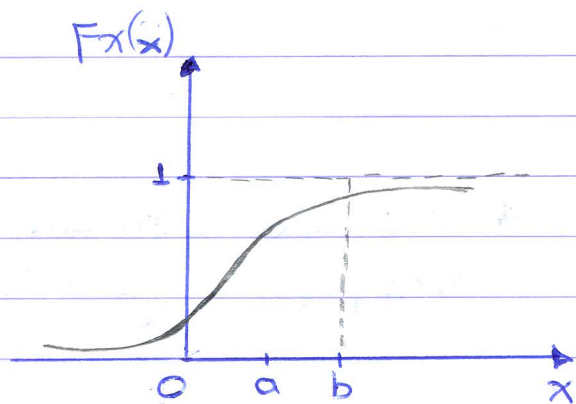
6) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) = P(X = x_0)$

7) $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

$a < b$ $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$

$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$



$$P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$P(X < x) = F_X(x^-)$$

$$F_X(b) - F_X(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = P(a < X \leq b)$$

- $P(X \leq x) = F_X(x)$



- $P(X < x) = F_X(x^-)$



- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-)$

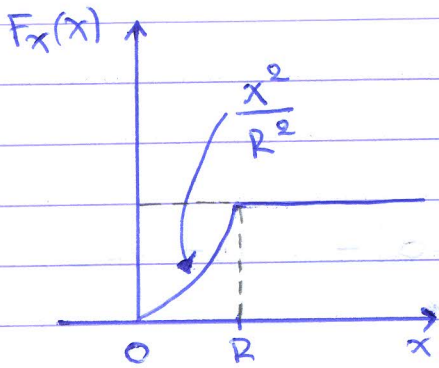


- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$



7) Υπολογισμός με Βδση την $F_X(x)$

$F_X(x) = P(X \leq x) \rightarrow$ Περιέχει όλη την πιθανοσφορία για $P(X \in A)$



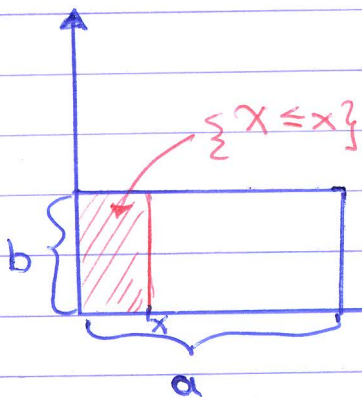
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{R^2} & , 0 \leq x \leq R \\ 1 & , x > R \end{cases} \quad \underline{\underline{R=1}}$$

$$\begin{aligned} P(X^2 + 5 > 8) &= P(X^2 > 3) = P(X < -\sqrt{3} \text{ ή } X > \sqrt{3}) = \\ &= P(X < -\sqrt{3}) + P(X > \sqrt{3}) \\ &= F_X(-\sqrt{3}^-) + 1 - F_X(\sqrt{3}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

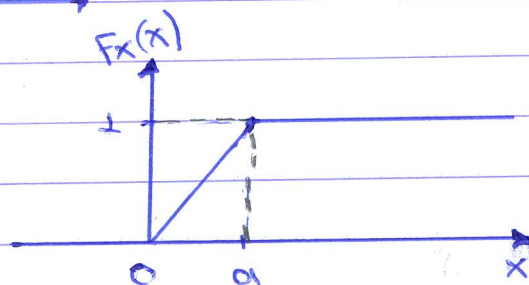
8) Παράδειγμα

Πείραμα τούρκης: Επιλογή τυχαίου σημείου στο ορθογώνιο $[0, a] \times [0, b]$

X = τετραγωνική του επιτ. σημείου

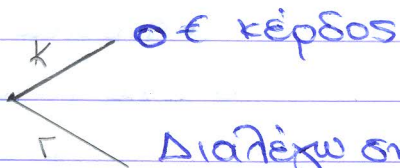


$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ (x \cdot b) / (a \cdot b) & , 0 \leq x \leq a \\ 1 & , x > a \end{cases}$$



9) Παράδειγμα

Πείραμα τύχης: Ριχνω νόμισμα



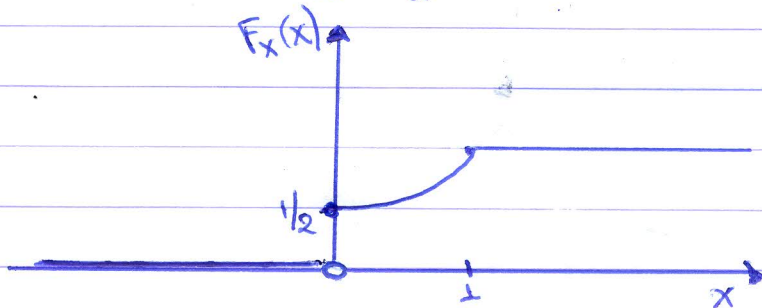
Διαλέγω σημείο σε τυχαίο στόχο ακριβώς 1 και
και
 $x \in$ κέρδος (όση η απόσταση του σημείου από το κ)

$Y =$ κέρδος

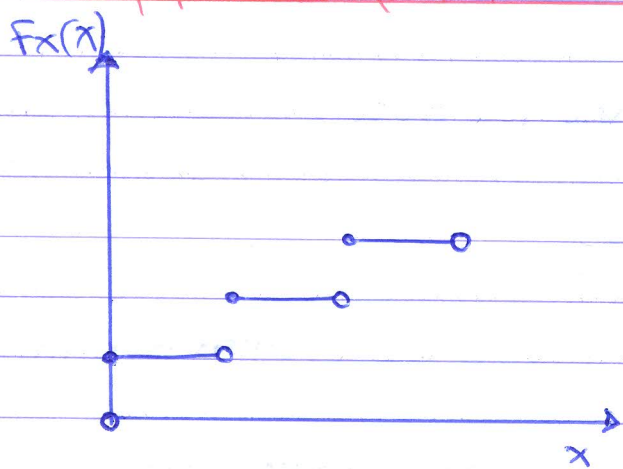
$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (1+x^2)/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{⊗}$$

$x \in [0, 1]$

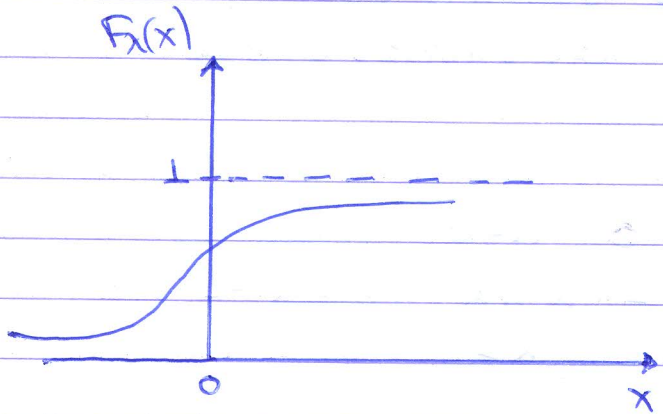
$$P(Y \leq x) = P(\text{φέρνω } \kappa \text{ ή } (\text{φέρνω } \Gamma \text{ και επιλέγω σημείο σε } \text{στόχο με απόσταση } \leq x)) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot x^2 \quad \text{⊗}$$



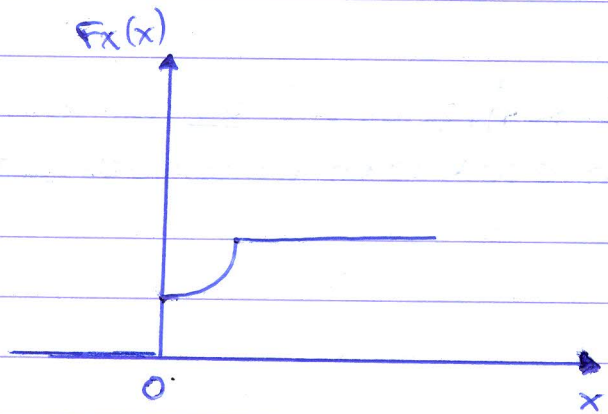
10) Μορφές Συνάρτησης Κατανομής



Go to
 Ελλιπαστική
 (απόσπαστη + σταθερή
 μεταξύ αλλαγών) → ΔΙΑΚΡΗΤΗ



Συνεχής
 παραγωγίσιμη → Συνεχής
 → Απόλυτα
Συνεχής



→ Μισαίτη