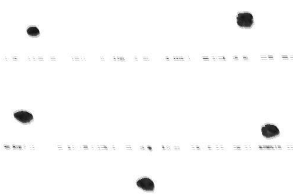
ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

7/12/21

Παράδειγμα

X άπειρο σύνολο, δ η διακριτή μετρική στον X.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) στον (X, δ) τ.ω. $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m \Rightarrow \delta(x_n, x_m) = 1$. Τότε η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.



- Αν υπήρχε, θα ήταν τελικά σταθερή.
- Ο (X, δ) είναι φραγμένος, άρα η (x_n) είναι επιπλέον φραγμένη.

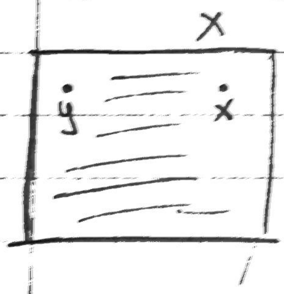
Ορισμός (ακολουθιακή συμπάγεια): Ένας μ.χ. (X, d) λέγεται **ακολουθιακά συμπαγής**, αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq (X,d)$. Μια οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται <u>κάλυμμα για το A</u>, αν $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.
Αν $(U_i)_{i\in I}$ είναι κάλυμμα για το A, μια υποοικογένεια $(U_i)_{i\in J}$, όπου $J \subseteq I$ της $(U_i)_{i\in I}$ λέγεται <u>υποκάλυμμα για το A</u>, αν $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$

Ορισμός: Ένα κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ λέγεται <u>ανοικτό</u>, αν όλα τα U_i είναι ανοικτά υποσύνολα του X.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Κάθε (X,d) έχει τουλάχιστον ένα ανοικτό κάλυμμα, το $\{X\}$. Αλλά: $\forall x\in X$ το $X\setminus\{x\}$ είναι ανοικτό και η $(X\setminus\{x\})_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, αν το X έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.



(2) $X=\mathbb{R}$. Ορίζουμε $U_n=(-n,n)$, $n\in\mathbb{N}$.
Έχουμε $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$, δηλ. η $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάλυμμα του $\mathbb{R}$. Αν κρατήσουμε πεπερασμένο το πλήθος $U_{n_1},\dots\dots,U_{n_m}$ με $n_1<\dots\dots<n_m$

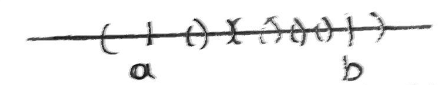
τότε $U_{n_1}\cup\dots\cup U_{n_m}=U_{n_m}=(-n_m,n_m)\neq\mathbb{R}$

<u>Δηλ.</u> το κάλυμμα $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>δεν</u> έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(δ') X άπειρο σύνολο με τη διακριτή μετρική.
Η οικογένεια $(\{x\})_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, αλλά δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα: αν $x_{i_1},\dots,x_{i_m}\in X$ τότε $\bigcup_{k=1}^{m}\{x_{i_k}\} = \{x_{i_1},\dots,x_{i_m}\}\neq X$.

Ορισμός ① Ένας μ.χ. (X,d) λέγεται συμπαγής, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα:
"Αν $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτά σύνολα και $X=\bigcup_{i\in I}U_i$, τότε $\exists\, i_1,\dots,i_m\in I$, τότε $X=U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$"
② Έστω (X,d) μ.χ. Ένα $A\subseteq X$ λέγεται συμπαγές, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα:
"Αν $U_i, i\in I$ είναι ανοικτά $\subseteq X$ και $A\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$, τότε $\exists\, i_1,\dots,i_m\in I$ τ.ω. $A\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$

Για παράδειγμα, είδαμε ότι ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι συμπαγής.
Όμως, κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές



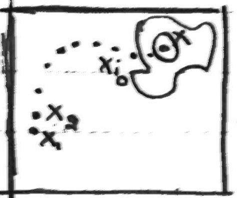
Άσκηση: Θεώρημα Hane-Borel

Άσκηση

(α) Κάθε πεπερασμένο $A\subseteq(X,d)$ είναι συμπαγές.
Γράφαμε $A=\{x_1,\dots,x_m\}$. Έστω $U_i, i\in I$ ανοικτά σύνολα τ.ω. $A\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$. Για κάθε $j\le m$ $\exists\, i_j\in I$ τ.ω. $x_j\in U_{i_j}$
$\hookrightarrow x_j\in\bigcup_{i\in I}U_i$

τότε $A=\{x_1,\dots,x_m\}\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$

(β) Έστω (X,d) μ.χ., (x_n) ακολουθία στον X, $x_n \to x \in X$. Τότε το $K=\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι <u>συμπαγές</u>.



<u>Λύση</u>: Έστω U_i ανοικτά $\subseteq X$ τ.ω. $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

· Υπάρχει $i_0 \in I$ τ.ω. $x \in U_{i_0}$

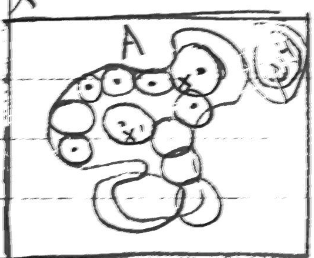
· Το U_{i_0} είναι ανοικτό και $x_n \to x$, άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ x_n \in U_{i_0}$. $\forall j \le n_0 \ \exists i_j \in I$ τ.ω. $x_j \in U_{i_j}$

· Τότε $K = \{x_1\} \cup \dots \{x_{n_0}\} \cup \underbrace{(\{x_n : n > n_0\} \cup \{x\})} \subseteq \underbrace{U_{i_1} \cup \dots U_{i_{n_0}} \cup U_{i_0}}_{\text{πεπερασμένο υποκάλυμμα}}$

<u>Τρεις Προτάσεις</u>

<u>Πρόταση 1</u>

Έστω $A \subseteq (X,d)$ συμπαγές. Τότε το A είναι κλειστό.



<u>Απόδειξη</u>: Θ.δ.ο. το $X\setminus A$ είναι ανοικτό.

Έστω $y \in X\setminus A$.

<u>Ορίζουμε κατάλληλο κάλυμμα του A</u>

Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \neq y \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $B(x,\varepsilon_x) \cap B(y,\varepsilon_y) = \emptyset$.

Τώρα, έχουμε $A \subseteq \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon_x) \leftarrow$ ανοικτό κάλυμμα

Αφού το A είναι <u>συμπαγές</u> $\exists x_1, \dots, x_m \in A$ τ.ω.

$A \subseteq B(x_1,\varepsilon_{x_1}) \cup \dots \cup B(x_m,\varepsilon_{x_m})$.

Ορίζουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_m}\} > 0$.

Τότε $\forall j=1,\dots,m \quad B(y,\varepsilon) \subseteq B(y,\varepsilon_{x_j})$ και $B(y,\varepsilon_{x_j}) \cap B(x,\varepsilon_{x_j}) = \emptyset$

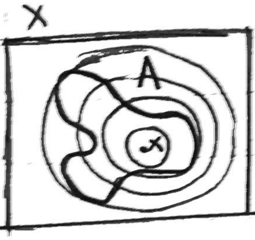
$\Rightarrow B(y,\varepsilon) \cap B(x_j,\varepsilon_{x_j}) = \emptyset$.

Άρα, $B(y,\varepsilon) \cap (\underbrace{B(x_1,\varepsilon_{x_1}) \cup \dots \cup B(x_m,\varepsilon_{x_m})}_{\supseteq A}) = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow B(y,\varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subseteq X\setminus A$.

Πρόταση 2

Έστω $A \subseteq (X,d)$ συμπαγές. Τότε το A είναι φραγμένο



Απόδειξη: Έστω $x \in A$. Η οικογένεια $(B(x,n))_{n=1}^{\infty}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, άρα και του A.
[Έστω $y \in X$. Επιλέγω $n > d(x,y)$ και τότε $y \in B(x,n)$]

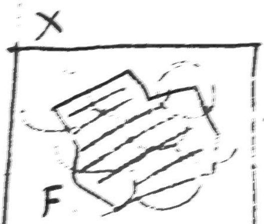
Έχουμε $A \subseteq \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n)}_{= X}$ και αφού το A είναι συμπαγές

$\exists\, n_1 < \dots < n_m$ τω. $A \subseteq B(x,n_1) \cup \dots \cup B(x,n_m) = B(x,n_m)$
Εξ' ορισμού το A είναι φραγμένο.

Σημείωση: Από τις Προτάσεις 1 και 2 έχουμε ότι κάθε συμπαγές $A \subseteq (X,d)$ είναι κλειστό και φραγμένο.
Το αντίστροφο, δεν ισχύει.
π.χ. X άπειρο σύνολο, δ η διακριτή μετρική, το ίδιο το X είναι κλειστό και φραγμένο, αλλά είδαμε ότι δεν είναι συμπαγές.

Πρόταση 3

Αν ο (X,d) είναι συμπαγής και $F \subseteq X$ κλειστό, τότε το F είναι συμπαγές.



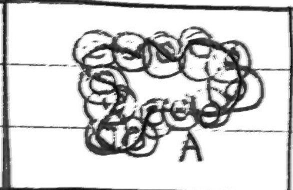
Απόδειξη: Έστω $U_i,\ i \in I$ ανοικτά τω. $F \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$
Αφού το F είναι κλειστό, το σύνολο $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Τώρα $X = F \cup (X \setminus F) \subseteq \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cup (X \setminus F)}_{\text{ανοικτό καλ... του } X}$

Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists\, i_1, \dots, i_m \in I$ τω.
$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \cup (X \setminus F) \Rightarrow$

$\Rightarrow F = F\cap X = (F\cap U_{i_1}) \cup \ldots\ldots \cup (F\cap U_{i_m}) \cup \cancelto{\emptyset}{[F\cap (X\setminus F)]}$
$\quad \subseteq U_{i_1} \cup \ldots\ldots \cup U_{i_m}$

Δηλ. βρίσκαμε πεπερασμένο υποκάλυμμα.

<u>Ορισμός</u>: Έστω (X,d) μ.χ. και $A\subseteq X$. Το A λέγεται <u>ολικά φραγμένο</u>, αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists m=m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ και $x_1,\ldots,x_m\in X$ τω. $A\subseteq B(x_1,\varepsilon)\cup\ldots\ldots\cup B(x_m,\varepsilon)$



<u>Παρατήρηση</u>

① Κάθε ολικά φραγμένο σύνολο είναι φραγμένο.

$[\exists x_1,\ldots,x_m : A\subseteq \underbrace{B(x_1,1)}_{\text{φραγμένο}}\cup\ldots\cup \underbrace{B(x_m,1)}_{\text{φραγμένο}} = \text{φραγμένο}]$

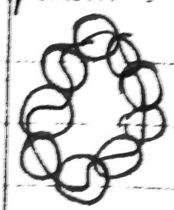
π.χ. Ο (X,δ), X άπειρο σύνολο, είναι φραγμένο, αλλά <u>όχι</u> ολικά φραγμένος: για $\varepsilon=\frac{1}{2}$, αν $X\subseteq B(x_1,1/2)\cup\ldots\cup B(x_m,1/2)$

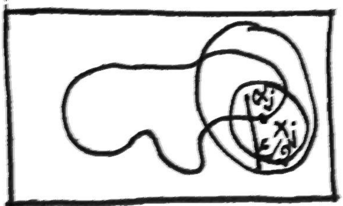
$=\{x_1\}\cup\ldots\{x_m\}=\{x_1,\ldots,x_m\}$ <u>άτοπο</u> γιατί X άπειρο σύνολο

② Αν το $A\subseteq(X,d)$ είναι ολικά φραγμένο και $B\subseteq A$, τότε το B είναι ολικά φραγμένο (Άσκηση)

③ Έστω $A\subseteq(X,d)$ ολικά φραγμένο. Τότε $\forall\varepsilon>0$ $\exists m\in\mathbb{N}$ και $a_1,\ldots,a_m\in A$ τω. $A\subseteq B(a_1,\varepsilon)\cup\ldots\cup B(a_m,\varepsilon)$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχουν $x_1,\ldots,x_m\in X$ τω. $A\subseteq B(x_1,\varepsilon/2)\cup\ldots\ldots\cup B(x_m,\varepsilon/2)$. Μπορώ να υποθέσω ότι $\emptyset\neq A\cap B(x_j,\varepsilon/2)$ $\forall j=1,\ldots,m$





Για κάθε j επιλέγουμε $a_j \in B(x_j, \varepsilon/2)$

Τότε $B(x_j, \varepsilon/2) \subseteq B(a_j, \varepsilon)$

[Αν $z \in B(x_j, \varepsilon/2)$, τότε $d(z,a_j) \le d(z,x_j) + d(x_j,a_j)$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, δηλ. $z \in B(a_j, \varepsilon)$]

Τότε $A \subseteq B(x_1, \varepsilon/2) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon/2) \subseteq B(a_1, \varepsilon/2) \cup \dots \cup B(a_m, \varepsilon/2)$

Το Θεώρημα

Έστω (X,d) μ.χ. Τ.α.ε.ι.:

(α) Ο (X,d) είναι συμπαγής (ορισμός με καλύμματα)

(β) Κάθε άπειρο $A \subseteq X$ έχει σημείο συσσώρευσης.

(γ) Ο (X,d) είναι ακολουθιακά συμπαγής
(κάθε (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία)

(δ) Ο (X,d) είναι ολικά φραγμένος και πλήρης

Απόδειξη: (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω A άπειρο υποσύνολο του X που δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

Έστω $x \in X$. Το x δεν είναι σ.σ. του A.

$\exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $B(x, \varepsilon_x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \Longrightarrow B(x, \varepsilon_x) \cap A \subseteq \{x\}$

Γράφουμε $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x)$ ανοικτή κάλυψη του X

Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists\, x_1, \dots, x_m \in X$ τ.ω.

$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \Longrightarrow A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B(x, \varepsilon_{x_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{x_i\} =$

$= \{x_1, \dots, x_m\}$. Άρα A πεπερασμένο, άτοπο.

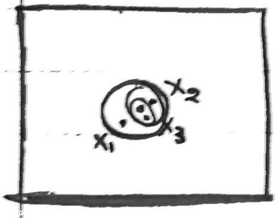
(β) $\Longrightarrow$ (δ) Έστω (x_n) ακολουθία στον X. Θεωρούμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

1η περίπτωση: Το A είναι πεπερασμένο $A = \{a_1, \dots, a_k\}$.

Υπάρχει $a \in A$ τ.ω. $x_n = a$ για άπειρους δείκτες $n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ η (x_n) έχει σταθερή υπακολουθία η οποία συγκλίνει.

2^{η} περίπτωση: Το A είναι άπειρο.

Από την υπόθεση, $\exists x \in A'$. Τότε έχουμε $\exists x_{k_n} \to x$



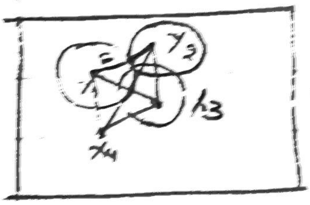
(δ) ⇒ (δ) Ο X είναι πλήρης

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Από το (δ) $\exists x_{k_n} \to x \in X$. Τότε (Κεφ. 2) $x_n \to x$

Ο X είναι ολικά φραγμένος

Έστω ότι δεν είναι. $\exists \varepsilon > 0$ τω.
"Ο X δεν καλύπτεται από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας ε".

Παίρνουμε $x_1 \in X$ τυχόν. Τότε $X \neq B(x_1, \varepsilon)$.



Άρα, $\exists x_2 \notin B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$

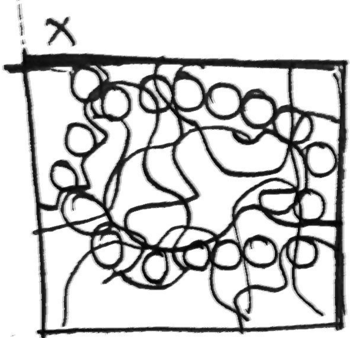
Έχουμε $X \neq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$

Άρα, $\exists x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ και $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$

Επαγωγικά βρίσκουμε $x_{n+1} \notin B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon)$
$\Rightarrow d(x_{n+1}, x_k) \geq \varepsilon \quad \forall k = 1, \dots, n$.

Έτσι ορίζεται ακολουθία (x_n) στον X τω. $\forall n \neq m$ $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Αυτή η (x_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα (x_{k_n}), γιατί για μεγάλα $n \neq m$ θα έχαμε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, άτοπο.

(δ) ⇒ (α) Έχουμε ότι ο X είναι ολικά φραγμένος και πλήρης. Θα υποθέσουμε ότι δεν είναι συμπαγής και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_i, i \in I$ τω. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, αλλά ο X δεν καλύπτεται από πεπερασμένα U_i.



Ο X είναι ολικά φραγμένος.
Για $\varepsilon = 1/2$ υπάρχουν $x_{1,1}, \ldots\ldots, x_{1,N_1}$ τ.ω. $X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1,j}, 1/2)$

Κάποιο από τις $B(x_{1,j}, 1/2)$ δεν καλύπτεται από πεπερασμένα τα πλήθη U_i.

Αλλιώς, ο X θα καλύπτεται από πεπερασμένα τα πλήθη U_i, γιατί το πλήθος των μπαλών είναι πεπερασ-μένο. Δηλ. $\exists x_1 \in X$ τ.ω. η $B(x_1, 1/2)$ δεν καλύπτεται από πεπερασμένο το πλήθος U_i.

Γράφουμε $B(x_1, 1/2) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_2} B(x_{2,j}, 1/2^2)$ (όλες τέμνουν την $B(x, 1/2)$)

ολ. φρ. σύνολο

Όπως πριν, κάποια από τις $B(x_{2,j}, 1/2^2)$ δεν καλύπτεται από πεπερασμένα U_i. Την λέμε $B\left(x_2, \frac{1}{2^2}\right)$.

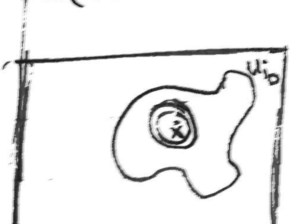
Επίσης, $d(x_1, x_2) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}$

(γιατί $B(x_1, 1/2) \cap B(x_2, 1/2^2) \neq \emptyset$)

Επαγωγικά, βρίσκουμε μπάλες $B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)$ που δεν καλύπτονται από πεπερασμένα το πλήθος U_i και $d(x_k, x_{k+1}) \le \frac{3}{2^{k+1}}$.

Έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^{k+1}} < \infty$ και ο X είναι πλήρης

άρα $x_k \to x \in X$



Υπάρχει $i_0 \in X$ τ.ω. $x \in U_{i_0}$. $\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq U_{i_0}$
Για μεγάλα k έχουμε
- $x_k \in B(x, \delta/2)$, γιατί $x_k \to x$

• $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{2}$, γιατί $\frac{1}{2^k} \longrightarrow x$

Τότε $B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right) \subseteq B(x, \delta) \subseteq B_{i_0}$

<u>Δηλ.</u> η $B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)$ καλύπτεται από το U_{i_0} μόνο του, <u>άτοπο</u>