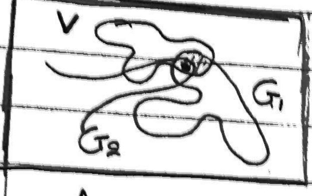
25/11/21

# Θεώρημα Baire

<u>Εισαγωγή</u>: Έχουμε δ.ο. σε κάθε μ.χ. $(X,d)$, αν $G_1, G_2$ είναι ανοικτά και πυκνά σύνολα του $X$, τότε το $G_1 \cap G_2$ είναι <u>ανοικτό</u> και <u>πυκνό</u> $\subseteq X$.




- Έστω $\phi \neq V \subseteq X$ ανοικτό
- $\underbrace{G_1 \cap V}_{V'} \neq \phi$ ανοικτό (γιατί $G_1$ πυκνό)

- Αφού $G_2$ πυκνό, έχουμε $G_2 \cap V' \neq \phi \Rightarrow (G_2 \cap G_1) \cap V \neq \phi$

Επαγωγικά αν $G_1, G_2, \ldots\ldots, G_n$ ανοικτά + πυκνά $\subseteq X$, τότε το $G_1 \cap G_2 \cap \ldots\ldots \cap G_n$ είναι <u>ανοικτό και πυκνό $\subseteq X$</u>

- Δεν ισχύει το ίδιο για <u>άπειρη</u> τομή ανοικτών-πυκνών $\subseteq X$

Στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ αν γράψουμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και ορίσουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$, τότε το $G_n$ είναι ανοικτό και πυκνό $\forall n \in \mathbb{N}$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q} \setminus \{q_n\}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}\right)^c = \mathbb{Q}^c = \phi$

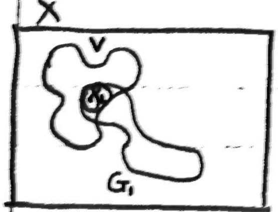
## Θεώρημα (Baire)

Έστω $(X, d)$ <u>πλήρης</u> μ.χ. Αν $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $X$, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι $G_\delta$-σύνολο και <u>πυκνό</u> $\subseteq X$. (Ειδικότερα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \phi$)

## Θεώρημα (Cantor)

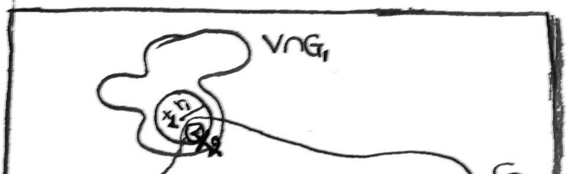
Αν ο $(X,d)$ είναι πλήρης και $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία μη-κενών κλειστών $\subseteq X$ με $diam(F_n) \to 0$, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$
(μονοσύνολο)

Απόδειξη: Έστω $\phi \neq V \subseteq X$ ανοικτό. Θα βρούμε $x \in V \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$




· Αφού το $G_1$ είναι πυκνό έχουμε $V \cap G_1 \neq \phi$ και το $V \cap G_1$ είναι ανοικτό.
Παίρνουμε $x_1 \in V \cap G_1$ και βρίσκουμε $0 < r_1 < 1$ τ.ω. $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq V \cap G_1$

Επειδή $V \cap G_1$ ανοικτό και $x_1 \in V \cap G_1$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x_1, \delta) \subseteq V \cap G_1$
Παίρνω $0 < r_1' < 1$, $r_1' < \delta$, οπότε $B(x_1, r_1') \subseteq B(x, \delta) \subseteq V \cap G_1$.
Μετά αν πάρω $0 < r_1 < r_1'$ έχω $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x_1, r_1')$




Επειδή το $G_2$ είναι πυκνό, έχουμε $B(x_1, r_1) \cap G_2 \neq \phi$ ξ ανοικτό
Θεωρούμε $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap G_2$.
Όπως πριν, βρίσκουμε $0 < r_2 < 1/2$ τ.ω. $\hat{B}(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1) \cap G_2 \subseteq V \cap G_1 \cap G_2$.
Επαγωγικά, $\forall n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n \in X$ και $0 < r_n < 1/n$ έτσι ώστε $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq V \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$, γιατί
$\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n \subseteq V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_{n-1} \cap G_n$
Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subseteq \hat{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$,
δηλ. η $\left(\hat{B}(x_n, r_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και $diam(\hat{B}(x_n, r_n)) \leq 2r_n < \frac{2}{n} \to 0$

Από το Θ. Cantor $\exists!\, x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$.

Τώρα, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x \in \hat{B}(x_n, r_n) \subseteq V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n$, δηλ $x \in V$ και $x \in G_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. $\Rightarrow x \in V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap \ldots$
και επειδή $V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap \ldots = V \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$, $x \in V \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$
Επειδή το $V$ ήταν τυχόν, το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό (ειδικότερα μη-κενό)

## Δυϊκή μορφή του Θ. Baire (Baire-2)

Έστω $(X,d)$ πλήρης μ.χ. και $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $X$ τω. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_n^{\circ} = \emptyset$. Τότε $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus F_n^{\circ} = X \setminus \emptyset = X$, δηλ. το $X \setminus F_n$ είναι πυκνό και ανοικτό ως συμπλήρωμα του $F_n$, που είναι κλειστό.
Από το Θ. Baire έπεται ότι $\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)}_{=\,X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} \neq \emptyset \Rightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

$\Rightarrow X \setminus X \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \neq \emptyset$ άτοπο

Ορολογία: (α) Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται αραιό ή πουθενά πυκνό, αν $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.
(β) Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται σύνολο α' κατηγορίας στον $X$, αν μπορεί να γραφεί ως $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ με τα $B_n$ αραιά.
(γ) Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται σύνολο β' κατηγορίας στον $X$, αν δεν είναι α' κατηγορίας.

Ισχυρισμός: Κάθε πλήρης μ.χ. είναι β' κατηγορίας στον εαυτό του.

Απόδειξη: Έστω ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n$ αραιά.
Τότε $X = \bigcup B_n \subseteq \bigcup \overline{B_n} \subseteq X \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \xRightarrow{\text{Baire-2}} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\operatorname{int}(\overline{B_{n_0}}) \neq \emptyset \Rightarrow B_{n_0}$ όχι αραιό άτοπο

## Εφαρμογές – Ασκήσεις

(α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ πυκνό και $G_\delta$-σύνολο, τότε το $A$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Λύση: Έστω $A$ αριθμήσιμο, πυκνό, $G_\delta$-σύνολο στο $\mathbb{R}$.

① Αφού το $A$ είναι $G_\delta$, υπάρχουν $G_n \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτά τω. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$ $A \subseteq G_n \Rightarrow \mathbb{R} \underset{A \text{ πυκνό}}{=} \overline{A} \subseteq \overline{G_n} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{G_n} = \mathbb{R} \Rightarrow G_n$ πυκνό

② Το $A$ είναι αριθμήσιμο, άρα $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ για κάποιους $a_n \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $V_n = \mathbb{R} \setminus \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$.

Κάθε $V_n$ είναι ανοικτό και πυκνό $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{a_n\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

Τότε $\emptyset = A \cap (\mathbb{R} \setminus A) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(G_n \cap V_n)}_{\text{ανοικτό, πυκνό}}$

άτοπο, γιατί ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, άρα αριθμήσιμη τομή ανοικτών - πυκνών υποσυνόλων του είναι πυκνό σύνολο (Baire) και ειδικότερα $\neq \emptyset$.

Συνέπεια: Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι $G_\delta$-σύνολο.

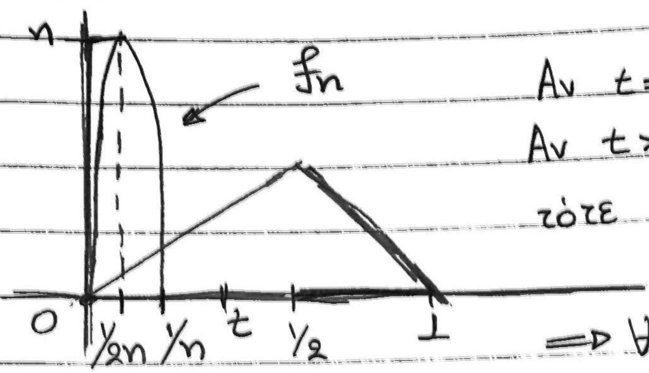
Εξήγηση: Διότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό $\subseteq \mathbb{R}$ και αν ήταν $G_\delta$ θα ήταν υπεραριθμήσιμο.

(B) <u>Θεώρημα Osgood</u>: Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\forall t \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(t))_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει διάστημα $(a,b) \subseteq [0,1]$ τ.ω. η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $(a,b)$.

<u>Υπόθεση</u>: $\forall t \in [0,1]$ $\exists M_t > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(t)| \leq M_t$

<u>Ζητούμενο</u>: $\exists (a,b) \subseteq [0,1]$ και $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall t \in (a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(t)| \leq M$

<u>Παράδειγμα</u>




Αν $t=0$, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(0)=0$ <u>οκ</u>

Αν $t>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n_0} < t$ και τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < t$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $f_n(t)=0$.

Άρα, η $(f_n(t))$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα φραγμένη.

Η $(f_n)$ <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0,1]$: αν $\exists M>0$ τ.ω. $\forall n$ $\forall t \in [0,1]$ $|f_n(t)| \leq M$, τότε $\forall n$ θα έχουμε $\left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) \right| \leq M \Rightarrow n \leq M$ <u>άτοπο</u>

Το Θ.Osgood λέει ότι η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε κάποιο υποδιάστημα του $[0,1]$.

Απόδειξη: Παίρνουμε $X=[0,1]$ με τη συνήθη μετρική.
Είναι πλήρης μ.χ., γιατί το $[0,1]$ είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$.
Ορίζουμε $F_m = \{ t\in[0,1] : \underline{\forall n\in\mathbb{N}} \text{ ισχύει } |f_n(t)|\le m\}$

- Κάθε $F_m$ είναι κλειστό: $F_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{t\in[0,1] : |f_n(t)|\le m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{f_n^{-1}([-m,m])}_{\text{κλειστό, γιατί } [-m,m] \text{ κλειστό και } f_n \text{ συνεχής.}}$

- $[0,1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Έστω $t\in[0,1]$. $\exists M_t>0 : \forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(t)|\le M_t$

Υπάρχει φυσικός $m>M_t$. Τότε $\forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(t)|\le M_t<m \Rightarrow$
$\Rightarrow t\in F_m$.

Από τη 2η μορφή του Baire, $\exists m_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\operatorname{int}(F_{m_0})\neq\emptyset$
$\Rightarrow$ υπάρχει διάστημα $(a,b)\subseteq F_{m_0}$. Τότε $\forall t\in(a,b)\ t\in F_{m_0}$
$\Rightarrow \forall t\in(a,b)\ \forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(t)|\le m_0 \Rightarrow$ στο $(a,b)$ η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη από το $m_0$. ■

## Άσκηση 22

Έστω $(X,d)$ πλήρης μ.χ. και $f: X\to\mathbb{Q}$ συνεχής συνάρτηση.
Ν.δ.ο. $\exists\ \emptyset\neq G\subseteq X$ ανοικτό τ.ω. η $f|_G$ είναι σταθερή συνάρτηση.

$f|_G$ σταθερή $\Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{Q}\ \forall x\in G\ f(x)=q \Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{Q}\ G\subseteq f^{-1}(\{q\})$

Λύση: • Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Γράφουμε $\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$.
• Ορίζουμε $F_n = f^{-1}(\{q_n\})$

κλειστή ως μονοσύνολο

Κάθε $F_n$ είναι κλειστό $\subseteq X$, γιατί η $f$ είναι συνεχής
($F_n$ = αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω συνεχούς συνάρτησης)
• $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\{q_n\}) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}\right) = f^{-1}(\mathbb{Q}) = X$

Από Θ. Baire ∃ $n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\text{int}(F_{n_0}) \neq \phi$.
Άρα $\exists\, \phi \neq G \subseteq F_{n_0}$ ανοικτό.
Για κάθε $x \in G$ έχουμε $x \in F_{n_0} \Rightarrow f(x) = q_{n_0}$, δηλαδή
η $f|_G$ είναι σταθερή και ίση με $q_{n_0}$.

## Άσκηση 21

Έστω $(X,d)$ πλήρης μ.χ. και $\mathcal{E}$ πυκνό $G_\delta$-υποσύνολο του $X$.
Αν $g: X \to X$ ομοιομορφισμός, ν.δ.ο. $\mathcal{E} \cap g(\mathcal{E}) \neq \phi$.

Λύση: • $\mathcal{E}$ $G_\delta$ $\Rightarrow \mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, $V_n$ ανοικτά $\subseteq X$

• $\forall n$ $\quad X \underset{\mathcal{E} \text{ πυκνό}}{=} \overline{\mathcal{E}} \subseteq \overline{V_n} \Rightarrow \overline{V_n} = X \Rightarrow V_n$ πυκνό

• $g(\mathcal{E}) = g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \underset{g \text{ είναι } 1\text{-}1 \text{ (ομοιομορφισμός)}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} g(V_n)$

Επίσης, αφού η $g$ είναι ομοιομορφισμός και $V_n$ ανοικτό έχουμε $g(V_n)$ ανοικτό $\subseteq X$.
Τέλος, επειδή η $g$ είναι συνεχής και επί απεικονίζει πυκνά σύνολα σε πυκνά σύνολα (Ασκήσεις Κεφ. 4) και αφού το $V_n$ είναι πυκνό έχουμε $g(V_n)$ πυκνό.

Τώρα: $\mathcal{E} \cap g(\mathcal{E}) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} g(V_n)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(V_n \cap g(V_n))}_{U_n} \overset{(**)(*)}{\neq} \phi$

$U_n$ ανοικτό & πυκνό ως τομή δύο ανοικτών & πυκνών συνόλων

(*) (και μάλιστα πυκνό στο $X$)
(**) από Baire, αφού ο $(X,d)$ είναι πλήρης.

# Ασκήσεις (Κεφάλαιο 5)

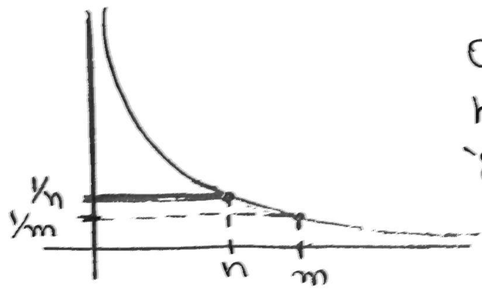
① Στον $\mathbb{N}$ θεωρούμε τις μετρικές $d(m,n)=|m-n|$ και $\sigma(m,n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$

(α) Ν.δ.ο. ο $(\mathbb{N},d)$ είναι πλήρης, αλλά ο $(\mathbb{N},\sigma)$ δεν είναι

(γ) Ν.δ.ο. $d\sim\sigma$, άρα οι δύο χώροι είναι ομοιομορφικοί.

(β) Ν.δ.ο. κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ είναι $d$-ανοικτό κ $\sigma$-κλειστό.

Λύση: (α) Έστω $(x_n)$ $d$-βασική στο $\mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει. (παίρνω $\varepsilon=1/2$ $\exists n_0$ $\forall n,m\geq n_0$ $|x_n-x_m|<1/2 \Rightarrow \forall n,m\geq n_0$ $x_n=x_m$)




Ορίζουμε $x_n=n$.

Η $(x_n)$ είναι $\sigma$-βασική.

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0$ $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n,m\geq n_0$

$$\sigma(x_n,x_m)=\sigma(n,m)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Έστω ότι $\exists x\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x_n=n \xrightarrow{\sigma} x \Rightarrow \sigma(n,x)\longrightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right|\longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\xrightarrow{1\cdot 1}\frac{1}{x}$.

$\frac{1}{n}\xrightarrow{1\cdot 1} 0$

Άρα, $\frac{1}{x}=0$, άτοπο

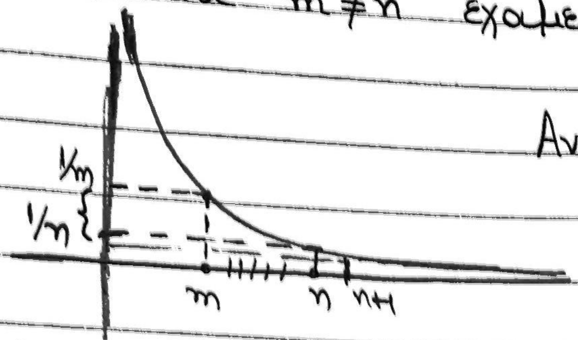
(β) έχουμε στον $(\mathbb{N},d)$ $\{n\}=B_d(n,1/2)$ ανοικτό


Άρα κάθε $A\subseteq\mathbb{N}$ είναι $d$-ανοικτό.

$\Rightarrow$ κάθε $B\subseteq\mathbb{N}$ είναι $d$-κλειστό.

Στον $(\mathbb{N},\sigma)$ κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ είναι ανοικτό.

Για κάθε $m \neq n$ έχουμε $\sigma(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \underset{\text{Άσκηση}}{\geq} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$




Αν πάρουμε $0 < \varepsilon < \frac{1}{n(n+1)}$, τότε

$B_\sigma(n,\varepsilon) = \{n\}$

↳ σ-ανοικτό

Άρα, κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι σ-ανοικτό και σ-κλειστό.

(γ) Έχουμε $d \sim \sigma$, γιατί οι $(\mathbb{N},d)$ και $(\mathbb{N},\sigma)$ έχουν τα ίδια ανοικτά και κλειστά σύνολα (ΟΛΑ ΤΑ $A \subseteq \mathbb{N}$).

Άρα, η $I: (\mathbb{N},d) \to (\mathbb{N},\sigma)$ είναι ομοιομορφισμός

(10) Έστω $(X,d)$ μ.χ. Ν.δ.ο. ο $X$ είναι πλήρης $\Longleftrightarrow$ κάθε αριθμήσιμο <u>κλειστό</u> $A \subseteq X$ είναι πλήρης μ.υπόχωρος.

<u>Λύση</u>: $(\Longrightarrow)$ $X$ πλήρης + $A$ κλειστό $\subseteq X \Longrightarrow (A, d_A)$ πλήρης
(γνωστή πρόταση)

$(\Longleftarrow)$ Έστω $(x_n)$ βασική ακολουθία στον $X$.

Θεωρούμε το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το $A$ είναι αριθμήσιμο.

1η περίπτωση: $A$ κλειστό

Τότε ο $(A,d_A)$ είναι πλήρης και $x_n \in A$.

Άρα, η $(x_n)$ είναι βασική στον $(A,d_A) \Longrightarrow x_n \longrightarrow x \in A$

2η περίπτωση: $A$ όχι κλειστό

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A} = A \cup A' \\ \text{και } A \subsetneq \overline{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow A' \neq \emptyset.$$ Τότε το $A$ έχει σ.σ.