στην Άσκηση ...

23/11/21

Πλήρεις Μετρικοί Χώροι

<u>Ορισμός</u>: Ένας μ.χ. (X, d) λέγεται <u>πλήρης</u>, αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) του X είναι συγκλίνουσα (συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$)

Παραδείγματα

(α) Ο (X, δ) είναι πλήρης.

Έστω (x_n) βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \quad \delta(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$

Ειδικότερα, για $m = n_0$, έχουμε $\forall n \geq n_0 \quad \delta(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = x_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$

Άρα, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, ίση με x_{n_0}, συνεπώς συγκλίνει.

(β) Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης.

Κάθε βασική ακολουθία πραγματικών συγκλίνει.

(γ) Ο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$, $1\le p\le\infty$ είναι πλήρης.

- $1\le p<\infty$: Έστω (x_n) βασική ακολουθία, $x_n=(x_{n1},\dots\dots,x_{nm})$

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ τω. $\forall n \underset{\geq}{\overset{m}{}} n_0$

$$\|x_n-x_m\|_p<\varepsilon \iff \left(\sum_{k=1}^{m}|x_{nk}-x_{mk}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon$$

Άρα, $\forall n,m\ge n_0$ και $\forall k=1,\dots\dots,m$

$$|x_{nk}-x_{mk}|\le\left(\sum_{k=1}^{m}|x_{nk}-x_{mk}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon$$

Άρα, $\forall k=1,\dots\dots,m$ η ακολουθία $(x_{nk})_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$

Από το (β) $\exists\, x_k\in\mathbb{R}$ τω. $x_{nk}\xrightarrow{n\to+\infty}x_k$

Δηλ.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n1}\longrightarrow x_1\\ x_{n2}\longrightarrow x_2\\ \vdots\\ x_{nm}\longrightarrow x_m\end{array}\right\}\Longrightarrow x_n=(x_{n1},\dots\dots,x_{nm})\xrightarrow{\|\cdot\|_p}x=(x_1,\dots\dots,x_m)$$

Το τελευταίο ισχύει, γιατί η μετρική που επάγεται στον $\mathbb{R}^m$ από την $\|\cdot\|_p$ είναι μετρική γινόμενο.

$$\left[\ \text{Αλλιώς,}\quad \|x_n-x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{m}|\underset{\downarrow\, 0}{x_{nk}-x_k}|^p\right)^{1/p}\longrightarrow 0\ \right]$$

- $p=\infty$ Όμοια - Άσκηση.

(δ) Ο $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ δεν είναι πλήρης.

Θεωρούμε την $q_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Στον $\mathbb{R}$ ξέρουμε ότι $q_n\xrightarrow{|\cdot|}e\notin\mathbb{Q}$

Άρα η (q_n) είναι $|\cdot|$-βασική στον $\mathbb{R}\overset{q_n\in\mathbb{Q}}{\Longrightarrow}$ η (q_n) είναι βασική στον $(\mathbb{Q},|\cdot|)$. Έστω ότι $\exists\, q\in\mathbb{Q}$ τω. $q_n\xrightarrow{|\cdot|}q$.

Τότε $q_n\longrightarrow q$ στο $\mathbb{R}$ ως προς την $|\cdot|$, όμως $q_n\to e$ στο $\mathbb{R}$.

Άρα $q=e\Longrightarrow e\in\mathbb{Q}$, άτοπο

Πρόταση 1

(α) Αν ο (X,d) πλήρης και $F \subseteq X$ κλειστό, τότε ο (F, d_F) είναι πλήρης.
(β) Αν (X,d) μ.χ., $\phi \neq F \subseteq X$ και ο (F, d_F) είναι πλήρης, τότε το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(*) Με d_F συμβολίζουμε τον περιορισμό της μετρικής d στο σύνολο F

Απόδειξη: (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (F, d_F).
Δηλ. $\boxed{x_n \in F}$ και $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \ d_F(x_n, x_m) < \varepsilon}$
$\underset{X}{\overset{\cap}{}}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$

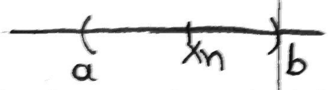
Άρα η (x_n) είναι βασική στον (X,d).
Ο X είναι πλήρης, άρα $\exists x \in X$ τ.ω. $d(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d} x$. Το F είναι κλειστό και $x_n \in F$, άρα $\boxed{x \in F}$.
Τότε $d_F(x_n, x) = d(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d_F} x$.
(β) Έστω (x_n) στο F τ.ω. $x_n \xrightarrow{d} x \in X$. Θ.δ.ο. $x \in F$.
· Αφού $x_n \xrightarrow{d} x$, η (x_n) είναι d-βασική και αφού $x_n \in F$ και $d_F = d$ έχουμε ότι η (x_n) είναι d_F-βασική στο F.
Αφού ο (F, d_F) είναι πλήρης, $\exists y \in F$ τ.ω. $x_n \xrightarrow{d_F} y \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} y$.
Από μοναδικότητα του ορίου (στον X) έχουμε $x = y \in F$, δηλ. $x \in F$.

Σημείωση: Πως χρησιμοποιείται το (β) της Πρότασης;
Αν $A \subseteq (X,d)$ και το A <u>δεν</u> είναι κλειστό, τότε ο (A, d_A) <u>δεν</u> είναι πλήρης.

Παραδείγματα

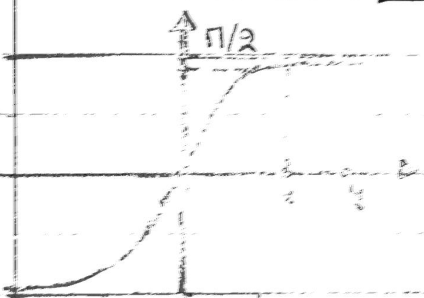
(1) Ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης: το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

(2) (a,b) με τη συνήθη μετρική: δεν είναι πλήρης π.χ., γιατί $\overline{(a,b)} = [a,b]$



Άσκηση 2

Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη μετρική $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Ν.δ.ο. η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική στο $\mathbb{R}$, αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.



Λύση: • $f(x) = \arctan x$, $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 1-1 και επί

• $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, άρα f γν. αύξουσα

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$

Έχουμε δει ότι επειδή η f είναι 1-1, η $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ είναι μετρική (άσκηση του κεφ. 1)

① $\boxed{d \sim |\cdot|}$ (*) Βασίζεται στο ότι οι f, f^{-1} είναι συνεχείς και στην αρχή της μεταφοράς.

Έστω $x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow d(x_n, x) = |\arctan x_n - \arctan x| \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \arctan x_n \xrightarrow[|\cdot|]{} \arctan x \xRightarrow[f^{-1} = \tan \text{ συνεχής}]{} \tan(\arctan x_n) \xrightarrow[|\cdot|]{} \tan(\arctan x)$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[|\cdot|]{} x$.

Έστω $x_n \xrightarrow[|\cdot|]{} x \underset{\substack{f=\arctan \\ \text{συνεχής}}}{\Longrightarrow} \arctan x_n \longrightarrow \arctan x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |\arctan x_n - \arctan x| \longrightarrow 0 \Longrightarrow d(x_n, x) \longrightarrow 0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow{d} x.$

Άρα, οι $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{R}, d)$ είναι ομοιομορφικές.

<u>Ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης</u>

Θέτουμε <u>$x_n = n$</u>. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \frac{\pi}{2}$ (για $n \to +\infty$)

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \left| f(n) - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε $\forall n, m \geq n_0$ έχουμε $d(x_n, x_m) = d(n, m) = |\arctan n - \arctan m|$

$= |f(n) - f(m)| \leq \left| f(n) - \frac{\pi}{2} \right| + \left| \frac{\pi}{2} - f(m) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Άρα, η (x_n) είναι d-βασική.

Έστω ότι $x_n = n \xrightarrow{d} x \in \mathbb{R} \xRightarrow{f \text{ συν.}} \arctan n \longrightarrow \arctan x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \tan(\arctan n) \longrightarrow \tan(\arctan x) \Longrightarrow n \xrightarrow{|\cdot|} x \in \mathbb{R}$ <u>άτοπο</u>, $\overset{\text{γιατί}}{\checkmark}\ n \xrightarrow{|\cdot|} +\infty$.

<u>Ασκήσεις</u>

(3) Έστω d_1, d_2 μετρικές στο ίδιο σύνολο X.

Υποθέτουμε ότι είναι <u>Lipschitz ισοδύναμες</u>: $\exists a, b > 0$ τ.ω.

$\forall x, y \in X : a\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b \cdot d_1(x,y)$.

Τότε (x_n) d_1-βασική $\Longleftrightarrow$ (x_n) d_2-βασική.

<u>Άσκηση</u>

· Επίσης · $d_1 \sim d_2$

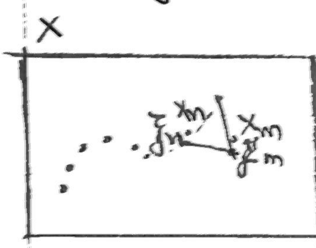
· (X, d_1) πλήρης $\Leftrightarrow$ (X, d_2) πλήρης

Λύση: ($\Longrightarrow$) Έστω (x_n) d_1-βασική. Έστω $\varepsilon>0$.
$\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n,m\geq n_0 \quad d_1(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{b}$.

Τότε $\forall n,m\geq n_0 \quad d_2(x_n,x_m)\leq b\cdot d_1(x_n,x_m)<\cancel{b}\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{b}}$

Άρα, η (x_n) είναι d_2-βασική.
($\Longleftarrow$) Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την $d_1(x,y)\leq\frac{d_2(x,y)}{a}$

4) Έστω (X,d) μ.χ. και D πυκνό υποσύνολο του X.
Υποθέτουμε ότι κάθε βασική ακολουθία (ξ_n) σημείων του D συγκλίνει. (σε κάποιο $x\in X$). Ν.δ.ο. ο X είναι πλήρης.



Λύση: Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο X.
(*) $\forall n\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε $\xi_n\in D$ τ.ω. $d(\xi_n,x_n)<\frac{1}{n}$
(υπάρχει, γιατί το D είναι πυκνό)

Ισχυρισμός: Η (ξ_n) είναι βασική.

$d(\xi_n,\xi_m)\leq d(\xi_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,\xi_m)<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{m}<\varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$. Η (x_n) είναι βασική, άρα $\exists n_1\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n,m\geq n_1$ $d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{3}$. $\exists n_2: \frac{1}{n_2}<\frac{\varepsilon}{3}$. Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$.

Τότε, $\forall n,m\geq n_0 \quad d(\xi_n,\xi_m)\leq d(\xi_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,\xi_m)<$
$<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{m}\underset{n,m\geq n_2}{\leq}\frac{1}{n_2}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{n_2}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

Από υπόθεση, $\exists x\in X$ τ.ω. $\xi_n\to x$.
Τότε, $d(x_n,x)\leq d(x_n,\xi_n)+d(\xi_n,x)<\frac{1}{n}+d(\xi_n,x)\to 0+0=0$.

Άρα, $x_n\to x$.

(5) Ν.δ.ο. ένας μ.χ. (X,d) είναι πλήρης ανν $\forall x\in X$ και $\forall \varepsilon>0$ η κλειστή μπάλα $\hat{B}(x,\varepsilon)=\{y\in X: d(y,x)\leq\varepsilon\}$. είναι πλήρης μ.χ.

Λύση: $(\Longrightarrow)$ X πλήρης + $\hat{B}(x,\varepsilon)$ κλειστό $\subseteq X \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $\hat{B}(x,\varepsilon)$ πλήρης μετρικός υπόχωρος (από Πρόταση 1 το (α))
$(\Longleftarrow)$ Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.
Η (x_n) είναι φραγμένη, άρα περιέχεται σε μπάλα, $\exists x_0\in X$ $\exists\varepsilon>0$: $\forall n$ $x_n\in\hat{B}(x_0,\varepsilon)$.
Ο $(\hat{B}(x_0,\varepsilon),d)$ είναι πλήρης, άρα $\exists x\in\hat{B}(x_0,\varepsilon)\subseteq X$ τω. $x_n\to x$, δηλαδή η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

Παραλλαγή (5'): (X,d) μ.χ. + $\exists\,\varepsilon>0$ τω. $\forall x\in X$ $\hat{B}(x,\varepsilon)$ πλήρης μ.χ.
Τότε ο (X,d) είναι πλήρης.

Λύση: Έστω (x_n) βασική. Για δοσμένο $\varepsilon>0$: $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τω $\forall n,m\geq n_0$ $d(x_n,x_m)<\varepsilon \xRightarrow{\text{ειδικότερα}} \forall n\geq n_0$ $d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \forall n\geq n_0$ $x_n\in\hat{B}(x_{n_0},\varepsilon)$.
Η $(x_n)_{n\geq n_0}$ είναι βασική (άσκηση) και περιέχεται στον πλήρη μ.χ. $\hat{B}(x_{n_0},\varepsilon)$. Άρα συγκλίνει σε κάποιο $x\in\hat{B}(x_{n_0},\varepsilon)\subseteq X$ και έπεται ότι $x_n\longrightarrow x$ (άσκηση).

Θεώρημα Cantor

Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και (F_n) φθίνουσα ακολουθία μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$.
Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$ και μάλιστα μονοσύνολο.

(F_n) φθίνουσα, δηλ. $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \dots$.

Το Θεώρημα Cantor γενικεύει την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων. Αν $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n$ κλειστά διαστήματα στο $\mathbb{R}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

<u>Λήμμα 1</u>

Αν $A_n \supseteq A_{n+1} \dots$ μη κενά $\subseteq (X,d)$ και $diam(A_n) \to 0$, τότε η τομή τους $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το πολύ μονοσύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x \neq y$ και $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x, y \in A_n$, άρα $0 < d(x,y) \leq diam(A_n) \to 0$

<u>άτοπο</u>

<u>Λήμμα 2</u>

Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $R_n = \{x_k : k \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Τότε η (x_n) είναι βασική $\Longleftrightarrow diam(R_n) \to 0$.

<u>Απόδειξη</u>: ($\Longleftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $diam(R_n) \to 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $diam(R_n) < \varepsilon$.

Έστω $n, m \geq n_0$. Τότε $x_n, x_m \in R_{n_0} = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq diam(R_{n_0}) < \varepsilon$.

($\Longrightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$.

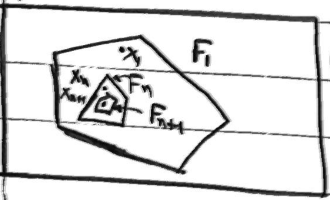
<u>Τότε</u> $diam(R_{n_0}) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

$$diam(R_{n_0}) = \sup\{\underbrace{d(x_n, x_m)}_{<\varepsilon/2} : n, m \geq n_0\}$$

Τώρα, αν $n \geq n_0$ έχουμε $R_n \subseteq R_{n_0} \Rightarrow diam(R_n) \leq diam(R_{n_0}) < \varepsilon$.
Άρα, $diam(R_n) \to 0$.

<u>Απόδειξη</u> (Θ. Cantor): Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε <u>τυχόν</u> $\boxed{x_n \in F_n}$

X



① Αν $R_n = \{x_k : k \geq n\}$, τότε $R_n \subseteq F_n \Rightarrow$
$\overset{0 \leq}{\Longrightarrow} diam(R_n) \leq diam(F_n) \to 0 \Rightarrow diam(R_n) \to 0$
$\overset{Λ2}{\Longrightarrow} (x_n)$ βασική.

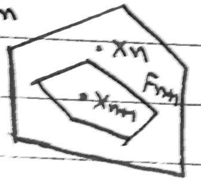
Θα εξηγήσουμε, γιατί $R_n \subseteq F_n$: τα στοιχεία του R_n είναι οι όροι x_k, $k \geq n$. Όμως, αν $k \geq n$, τότε $x_k \in F_k \subseteq F_n$ ((F_n) φθιν.) $\Rightarrow R_n = \{x_k : k \geq n\} \subseteq F_n$.

② Αφού ο X είναι πλήρης, $\exists x \in X$ τ.ω. $x_n \to x$.

③ $\underbrace{x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n}$, το οποίο θα δώσει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ (και από Λημ. 1 μονοσύνολο)

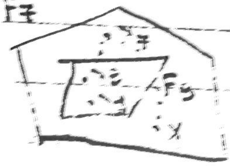
Παίρνουμε τυχόν $n \in \mathbb{N}$ και δ.ο. $x \in F_n$.

Fn



Έχουμε $R_n \subseteq F_n$, δηλ. $\forall k \geq n$ $x_k \in F_n$.
Δηλαδή το τελικό τμήμα $(x_k)_{k=n}^{\infty}$ της (x_n) περιέχεται στο F_n και <u>συγκλίνει</u> στο x $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \in F_n$, γιατί το F_n είναι κλειστό.

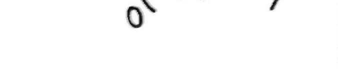
F7



<u>Παραδείγματα</u> (σε υποθέσεις χρειάζονται)

• "τα F_n είναι <u>κλειστά</u>"
Αν πάρουμε $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

(A_n) φθίνουσα + $diam(A_n) \to 0$



Όμως, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0,\frac{1}{n}\right) = \emptyset$. ($\nexists\, t>0 : \forall n \ \ t<1/n$)
Αρχιμήδεια Ιδιότητα

• "$\underline{\text{diam}(F_n) \to 0}$", $F_n = [n,+\infty), n\in\mathbb{N}$

Τα F_n είναι κλειστά και $F_n \supseteq F_{n+1}$ $\forall n$

Όμως, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n,+\infty)=\emptyset$

($\nexists\, t\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\forall n\in\mathbb{N}$ $t\geq n$).

Εδώ $\text{diam}(F_n)=+\infty$.

<u>Αντίστροφο του Θ. Cantor</u>

Έστω (X,d) μ.χ. με την εξής ιδιότητα:
"$\forall$ φθίνουσα (F_n) κλειστών μη κενών $\subseteq X$ με $\text{diam}(F_n)\to 0$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$". Τότε ο X είναι πλήρης.

<u>Απόδειξη:</u> • Έστω (x_n) βασική
• Λήμμα 2 $\Rightarrow \text{diam}(R_n)\to 0$ (όπου $R_n=\{x_k : k\geq n\}$)
• Ορίζουμε $F_n = \overline{R_n}$. Τότε:
(i) $R_n \supseteq R_{n+1} \Rightarrow F_n \supseteq F_{n+1}$
(ii) $\text{diam}(F_n)=\text{diam}(R_n)\to 0$
• Από υπόθεση, $\exists x\in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

<u>Τότε</u> $\forall n$ $d(\underset{\substack{\cap \\ R_n\subseteq F_n}}{x_n}, \underset{\in F_n}{x}) \leq \text{diam}(F_n)\to 0$. Άρα $x_n\to x$.