18/11/21

Ασκήσεις (Κεφαλαίου 4)

(2) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ και $x_0\in X$.
Η f είναι συνεχής στο x_0 ανν $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ τ.ω. αν $x,y\in B(x_0,\delta)$, τότε $\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$.

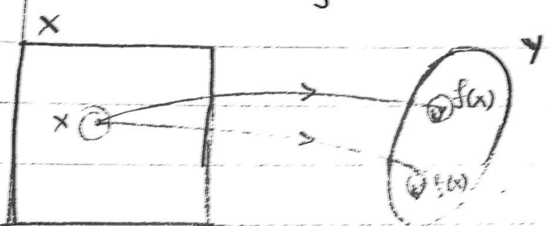
Λύση: ($\Longrightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, $\exists \delta>0$ τ.ω. αν $z\in B(x_0,\delta)$, τότε $\sigma(f(z),f(x_0))<\varepsilon/2$.
Τότε, αν $x,y\in B(x_0,\delta)$, τότε

$$\sigma(f(x),f(y))\le \sigma(f(\underset{z}{x}),f(x_0))+\sigma(f(x_0),f(\underset{z}{y}))<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

($\Longleftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $\delta>0$ τ.ω. $\forall x,y\in B(x_0,\delta)$: $\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$
Αφού $\overset{y}{x_0}\in B(x_0,\delta)$, $\forall x\in B(x_0,\delta)$ έχουμε $\sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

(24) Έστω $f,g:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχείς και $f(x)\neq g(x)$

N.δ.ο. $\exists r>0$ τ.ω. $\forall y,z\in B(x,r)$ ισχύει $f(y)\neq g(z)$



Λύση: Αφού $f(x)\neq g(x)$ (στον Y) $\exists \varepsilon>0$ τ.ω.

$B_\sigma(f(x),\varepsilon)\cap B_\sigma(g(x),\varepsilon)=\emptyset$ (*)

π.χ. παίρνουμε $0<\varepsilon<\dfrac{\sigma(f(x),g(x))}{2}$

Οι f,g είναι συνεχείς στο x, $\exists r>0$ τ.ω.
① $\forall y\in B_d(x,r)$ $\sigma(f(y),f(x))<\varepsilon$
② $\forall z\in B_d(x,r)$ $\sigma(g(z),g(x))<\varepsilon$

Βρίσκουμε r_1 για την ①, r_2 για το ② και $r=\min\{r_1,r_2\}$

Άρα $\forall y,z\in B_d(x,r)$ έχουμε $f(y)\in B_\sigma(f(x),\varepsilon)$ και $g(z)\in B_\sigma(g(x),\varepsilon)$
Αν είχαμε $f(y)=g(z)$, τότε θα είχαμε
$f(y)=g(z)\in B_\sigma(f(x),\varepsilon)\cap B_\sigma(g(x),\sigma)\neq\emptyset$, άτοπο (από την (*))

(10) Έστω $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός.
Ν.δ.ο. (X,d) διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow$ (Y,σ) διαχωρίσιμος

Λύση: ($\Rightarrow$) Υπάρχει D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.

Θεωρούμε το σύνολο $f(D)=\{f(d): d\in D\}$.
Η $f|_D : D \to f(D)$ είναι 1-1 και επί και το D είναι αριθμήσιμο, άρα το $f(D)$ είναι αριθμήσιμο.
Το $f(D)$ είναι πυκνό: $\overline{f(D)}=Y$
Έστω $y\in Y$. Αφού η f είναι επί, $\exists x\in X$ τ.ω. $y=f(x)$.
Αφού το D είναι πυκνό στο X, $\exists$ (d_n) στο D τ.ω. $d_n \to x$.
Η f είναι συνεχής, άρα $\underset{f(D)}{\underset{\cap}{f(d_n)}} \longrightarrow f(x)=y$

Άρα $y\in \overline{f(D)}$

Άσκηση: Έστω $f:(X,d)\to(Y,d)$ συνεχής και επί.
Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε ο Y είναι διαχωρίσιμος
(Ίδια απόδειξη)

(11) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ τ.ω. "$\forall A\subseteq X$ ισχύει $f(A')\subseteq [f(A)]'$"
Ν.δ.ο. η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

f συνεχής $\Updownarrow$ ① $\forall A\subseteq X$ $f(\bar{A})\subseteq \overline{f(A)}$

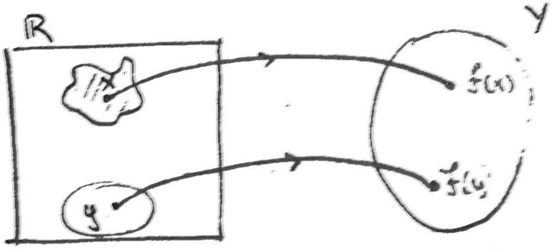
$\boxed{\bar{A}=A\cup A'}$ ② Λύση: Παίρνουμε τυχόν $A\subseteq X$. Έχουμε:
$f(\bar{A})=f(A\cup A')=f(A)\cup f(A')$. Έχουμε $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$ (κάθε σύνολο περιέχεται στην κλειστή του θήκη)
και $\overline{f(A)}=f(A)\cup[f(A)]'$ (πάλι από το ②)
$\Rightarrow [f(A)]'\subseteq \overline{f(A)}$. Έπεται ότι $f(\bar{A})=f(A)\cup f(A')\subseteq \overline{f(A)}$
Από το ① η f συνεχής.

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει.
Θεωρούμε την $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Η f είναι συνεχής και για $A=\mathbb{R}$ έχουμε $f(A')=f(\mathbb{R})=\{0\}$
ενώ $[f(A)]'=\{0\}'=\emptyset$.

(12) Έστω $f: \mathbb{R} \to (Y,\delta)$, όπου δ η διακριτή μετρική στο Y.
Ν.δ.ο. f συνεχής $\Longleftrightarrow$ f σταθερή

<u>Λύση</u>: ($\Longleftarrow$) Κάθε σταθερή συνάρτηση μεταξύ μ.χ. είναι συνεχής (απλό με τους ε-δ ορισμούς)
($\Longrightarrow$) Έστω $f: \mathbb{R} \to (Y,\delta)$ συνεχής συνάρτηση που <u>δεν είναι σταθερή</u>.
Τότε $\exists x,y \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) \neq f(y)$. Θεωρούμε το $B=\{f(x)\} \subseteq Y$
Το B είναι ανοικτό <u>και</u> κλειστό ως προς τη διακριτή μετρική.
Αφού η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό και κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$.

(α) $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό $\Longleftrightarrow$ το A είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων.
(β) Άσκηση Κεφ.3
A ανοιχτό & κλ. $\subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow A=\emptyset$ ή $A=\mathbb{R}$



Από γνωστή άσκηση $f^{-1}(B)=\emptyset$ ή $f^{-1}(B)=\mathbb{R}$

$f^{-1}(B)=\emptyset$: <u>άτοπο</u>, γιατί $x \in f^{-1}(B)$

$f^{-1}(B)=\mathbb{R}$: <u>άτοπο</u>, γιατί $y \notin f^{-1}(B)$, $f(y) \neq f(x)$, άρα $f(y) \notin \underbrace{\{f(x)\}}_{B}$

(13) Μια συνάρτηση $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ λέγεται <u>τοπικά φραγμένη</u>, αν $\forall x \in X \ \exists \delta>0$ τ.ω. η $f|_{B(x,\delta)}$ να είναι φραγμένη.

(α) Αν η f είναι συνεχής, τότε είναι τοπικά φραγμένη.
Ισχύει το αντίστροφο;
(β) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε f συνεχής $\Longleftrightarrow$ f τοπικά φραγμένη & έχει κλειστό γράφημα

Λύση: (α) Έστω $x \in X$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ τ.ω.
$f(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon) \Rightarrow f|_{B_d(x,\delta)}$ φραγμένη

$f: A \to B$ φραγμένη
$\iff f(A)$ φραγμένο $\subseteq B$
$\iff f(A)$ περιέχεται σε κάποια μπάλα του B

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad g(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

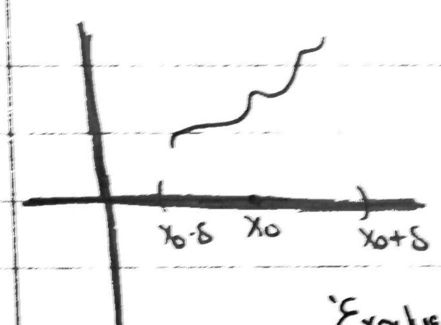
Η g είναι φραγμένη, άρα και τοπικά φραγμένη, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο.

(β) ($\Longrightarrow$) Ισχύει γενικότερα για συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Στο (α) είδαμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι τοπικά φραγμένη και στην Άσκηση 4.6 ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει κλειστό γράφημα.

Δίνεται ότι το $G_f=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}$ είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^2$

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\exists x_0\in\mathbb{R}$ στο οποίο η f δεν είναι συνεχής. Αφού η f είναι τοπικά φραγμένη, $\exists \delta>0$ τ.ω. η $f|_{(x_0-\delta,x_0+\delta)}$ να είναι φραγμένη, δηλ. $\exists M>0$ τ.ω. $\boxed{\text{"αν } |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|\le M\text{"}}$ (*)

Άρνηση του ορισμού (με ακολουθίες): $\exists \varepsilon>0$ και (x_n) στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $x_n\to x_0$ και $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon$ (**)



$\exists n_0\in\mathbb{N}$ $\forall n\ge n_0$ $|x_n-x_0|<\delta$ (διότι $x_n\to x_0$)

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\forall n\ge n_0$ $|f(x_n)|\le M$. Άρα η $f(x_n)$ φραγμένη.

Από το Θ. Bolzano-Weierstrass, $\exists (x_{k_n})$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_{k_n}) \to y\in\mathbb{R} \\ \text{Έχουμε και } x_{k_n}\to x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x_{k_n}, f(x_{k_n}))\in G_f \to (x_0,y)$$

Αφού το G_f είναι κλειστό, έχουμε $(x_0,y)\in G_f \Rightarrow \boxed{y=f(x_0)}$.

Τότε $f(x_{k_n})\to y=f(x_0)$ άτοπο, γιατί $\forall n$ $|f(x_{k_n})-f(x_0)|\ge\varepsilon$ (**)

(14) Έστω $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής και D πυκνό υποσύνολο του X

Σωστό ή λάθος;

(α) $f|_D$ φραγμένη $\Rightarrow$ f φραγμένη

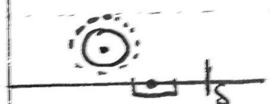
(β) $f|_D$ ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής

(δ) $f|_D$ 1-1 $\Rightarrow$ f 1-1

<u>Λύση</u>: (α) NAI $f(X) = f(\bar{D}) \subseteq \overline{f(D)}$, γιατί η f είναι συνεχής.

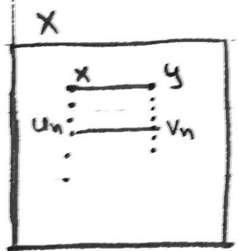
Η $f|_D$ φραγμένη $\Rightarrow \exists\, y_0 \in X$ και $R>0$ τ.ω. $f(D) \subseteq B_\sigma(y_0,R)$

<u>Άρα</u>: $f(X) \subseteq \overline{f(D)} \subseteq \overline{B_\sigma(y_0,R)} \subseteq \hat{B}_\sigma(y_0,R) \subseteq B_\sigma(y_0,R+1)$



(β) <u>NAI</u>. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η $f|_D$ είναι ομ. συνεχής $\exists\, \delta>0$ τ.ω.
"αν $u,v \in D$ και $d(u,v)<\delta \Rightarrow \sigma(f(u),f(v))<\varepsilon$". (*)

<u>Το ίδιο δ μας κάνει για την f</u>: Έστω $x,y \in X$ με $d(x,y)<\delta$



(D πυκνό)

Υπάρχουν (u_n) (v_n) στο D τ.ω. $u_n \to x$ και $v_n \to y$

Τότε $d(u_n,v_n) \to d(x,y) < \delta \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$

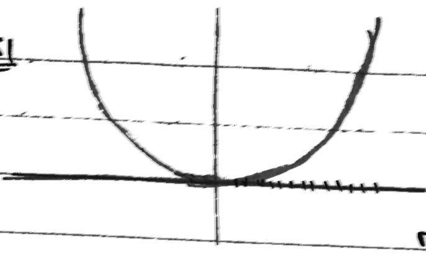
$d(u_n,v_n)<\delta \overset{(*)}{\Rightarrow} \forall n \geq n_0 \quad \sigma(f(u_n),f(v_n)) < \varepsilon/2$

Αφού η f είναι συνεχής $f(u_n) \to f(x)$ και $f(v_n) \to f(y)$

$$\underbrace{\sigma(f(u_n),f(v_n))}_{\text{τελικά } < \varepsilon/2} \xrightarrow{\Downarrow} \sigma(f(x),f(y))$$

Άρα, $\sigma(f(x),f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

(δ) ΟΧΙ.



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

Η f είναι συνεχής και δεν είναι 1-1. Θα ορίσουμε κατάλληλο πυκνό $D\subseteq\mathbb{R}$ τ.ω. αν $x\neq y$ στο D, τότε $f(x)\neq f(y)$ (δηλ. $f|_D$ 1-1)

Ορίζουμε $D=(\mathbb{Q}\cap(0,+\infty))\cup((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(-\infty,0))\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{D}=\overline{\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)}\cup\overline{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(-\infty,0)}=[0,+\infty)\cup(-\infty,0]=\mathbb{R}$

Άρα το D είναι πυκνό.

Έστω $x\neq y$ στο D.

① Αν $x,y>0$, τότε π.χ. $0<x<y\Rightarrow 0<x^2<y^2$, δηλ. $f(x)\neq f(y)$
(ή η f είναι 1-1 στο $(0,+\infty)$)

② Αν $x,y<0$, τότε π.χ. $x<y<0\Rightarrow x^2>y^2\Rightarrow f(x)\neq f(y)$
(ή η f είναι 1-1 στο $(-\infty,0)$)

③ Αν $x<0<y$, τότε x άρρητος και y ρητός $\Rightarrow x\neq -y\Rightarrow$
$\Rightarrow x^2\neq y^2$, διότι $f(x)\neq f(y)$ και $x\neq y$

21) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχής. Ν.α.δ.

(α) Η $g:X\times Y\to\mathbb{R}$ με $g(x,y)=\sigma(f(x),y)$ είναι συνεχής

(β) Το $A=\{(x,y)\in X\times Y: f(x)\in B_\sigma(y,1)\}$ είναι συνεχής

Λύση: (α) Έστω $\underbrace{(x_n,y_n)}_{\subseteq X\times Y}\to(x,y)$

Ζητάμε $\sigma(f(x_n),y_n)\to\sigma(f(x),y)$

Τότε $\left.\begin{array}{l} x_n\to x \xRightarrow{f\text{ συν.}} f(x_n)\to f(x) \\ \text{και } y_n\to y\end{array}\right\}\Rightarrow \sigma(f(x_n),y_n)\to\sigma(f(x),y)\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_n,y_n)\to g(x,y)$

(β) $A=\{(x,y)\in X\times Y:\sigma(f(x),y)<1\}=\{(x,y)\in X\times Y: g(x,y)<1\}=$
$=g^{-1}(\underbrace{(-\infty,1)}_{\text{ανοικτό }\subseteq\mathbb{R}})=$ ανοικτό, γιατί η g είναι συνεχής από το (α)

(22) Έστω $f:(X,d) \to \mathbb{R}$. Ν.δ.ο. f συνεχής $\iff$

$\iff \forall a \in \mathbb{R}$ το $\overbrace{\{x \in X : f(x) < a\}}^{f^{-1}((-\infty,a))}$ ανοικτό <u>και</u>

$\forall b \in \mathbb{R}$ το $\overbrace{\{x \in X : f(x) > b\}}^{f^{-1}((b,+\infty))}$ ανοικτό

<u>Λύση</u>: $(\Rightarrow)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x \in X : f(x) < a\} = f^{-1}(\underbrace{(-\infty,a)}_{\text{ανοικτό}}) =$ ανοικτό

$\forall b \in \mathbb{R}$ $\{x \in X : f(x) > b\} = f^{-1}(\underbrace{(b,+\infty)}_{\text{ανοικτό}}) =$ ανοικτό

$(\Leftarrow)$ Αν $b < a$, τότε $\{x \in X : b < f(x) < a\} \overset{= f^{-1}((b,a))}{=} \underbrace{\{x : f(x) > b\}}_{\text{ανοικτό}} \cap \underbrace{\{x : f(x) < a\}}_{\text{ανοικτό}}$

$=$ ανοικτό ως τομή ανοικτών

b a

Έστω $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό. Τότε $G = \bigcup_n (b_n, a_n)$,

όπου (b_n, a_n) ανοικτά διαστήματα ή ανοικτά ημιδιαστήματα

Τότε $f^{-1}(G) = \bigcup_n \underbrace{f^{-1}((b_n, a_n))}_{\text{ανοικτό}} =$ ανοικτό ως ένωση ανοικτών

(18) Έστω (X,d) μ.χ. και $A \subseteq X$.

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει ομοιόμορφα συνεχής επέκταση $F : \bar{A} \to \mathbb{R}$ της f

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ομ. συν.

$\Updownarrow$

$\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\exists \lim_{x \to b^-} f(x)$ και f συν.

<u>Λύση</u>: Βήμα 1ο: Πως θα ορίσουμε το $F(x)$ για $x \in \bar{A}$

- $\exists (x_n)$ στο A τ.ω. $x_n \to x$
- Άρα η (x_n) είναι βασική (ως συγκλίνουσα)
- Η f είναι ομ. συνεχής $\to$ η $(f(x_n))$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$
- Άρα $\exists\, y = \lim f(x_n)$
- Ορίζουμε $F(x) = y = \lim f(x_n)$

Αν (x_n') μια άλλη ακολουθία στο A με $x_n' \to x$, τότε όπως πριν η $f(x_n') \to y'$.

Όμως, $d(x_n, x_n') \to 0$ (γιατί $x_n \to x$, $x_n' \to x$)

$\xrightarrow{f \text{ ομ. συνεχής}} \sigma(f(x_n), f(x_n')) \to 0$. Άρα, $\sigma(y,y') = 0 \Rightarrow y = y'$

$\downarrow$

$\sigma(y,y')$

Αυτό δείχνει ότι η τιμή $F(x)$ είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή της (x_n)).

Αν $x \in A$ μπορούμε να πάρουμε $x_n = x \to x$ και τότε $F(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x) = f(x)$, δηλ. ότι η F είναι επέκταση της f: $F|_A \equiv f$.

<u>Βήμα 2ο</u>: Χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη συνέχεια της f δ.ο. και η F είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Επειδή το A είναι <u>πυκνό</u> στο $\bar{A}$ το έχουμε ουσιαστικά κάνει στην Άσκηση 14(β).