11/11/21

# Ασκήσεις

Στον $X\times Y$ θεωρούμε τυ-χουσα μετρική γινόμενο

⑥ Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Το γράφημα της $f$ είναι το $G_f=\{(x,f(x)):x\in X\}\subseteq X\times Y$.

- Αν η $f$ είναι συνεχής, τότε το $G_f$ είναι κλειστό
- Ισχύει το αντίστροφο;

Λύση: · Έστω $(x_n,f(x_n))$ στο $G_f$ και έστω ότι $(x_n,f(x_n))\to(x,y)\in X\times Y$

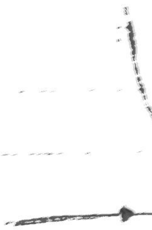
Θ.δ.ο. $(x,y)\in G_f \iff \boxed{y=f(x)}$

Έχουμε $(x_n,f(x_n))\to(x,y) \xRightarrow[\text{στον } X\times Y]{\text{μ.γ.}} \begin{cases} x_n\to x \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n)\to f(x)\\ f(x_n)\to y\end{cases}$

Άρα $y=f(x)$

- ΟΧΙ. $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

$$G_f=\underbrace{\left\{\left(x,\tfrac{1}{x}\right):x>0\right\}}_{A}\cup\underbrace{\{(0,0)\}}_{B}$$



Η $f$ είναι ασυνεχής στο 0, γιατί

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Το $G_f$ είναι κλειστό: Το $B=\{(0,0)\}$ είναι κλειστό ως μονοσύνολο.

Το $A$ είναι κλειστό: Έστω $\left(x_n,\frac{1}{x_n}\right)\in A$ $(x_n>0)$ και έστω ότι $\left(x_n,\frac{1}{x_n}\right)\to(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ζητάμε $\boxed{y=\frac{1}{x}}$ και $\boxed{x>0}$

οπότε $(x,y)=\left(x,\frac{1}{x}\right)\in A$.

Έχουμε $\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ \frac{1}{x_n} \to y \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{x_n \cdot \frac{1}{x_n}}_{=1} \to x \cdot y$. Άρα $xy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > 0$ και $y = \frac{1}{x}$.

## Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις

$f: (X, d) \to (Y, \sigma)$. Λέγεται Lipschitz, αν $\exists M > 0 : \forall x, y \in X$
$\sigma(f(x), f(y)) \leq M d(x, y)$
Είδαμε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{M}\right)$

Παρατηρήσεις: (α) Ομοιόμορφα συνεχής $\not\Rightarrow$ Lipschitz
Η $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
Από την $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a, b \geq 0$ έχουμε:
$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, γιατί μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \geq y$ και τότε $\sqrt{x} = \sqrt{y + (x-y)} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|}$
Αν μας δώσουνε $\varepsilon > 0$ παίρνουμε $\delta = \varepsilon^2$ και $\forall x, y \geq 0$ με $|x-y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$
Έστω ότι η $f$ είναι Lipschitz.
Τότε $\exists M > 0 : \forall x, y \geq 0 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|$
Για $y = 0$ έχουμε $\forall x \geq 0 \quad \sqrt{x} \leq Mx \Rightarrow \forall x \geq 0 \quad 1 \leq \underbrace{M\sqrt{x}}_{\xrightarrow{x \to 0} 0}$ άτοπο

(β) Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

Τότε $f$ Lipschitz $\iff$ η $f'$ είναι φραγμένη.

<u>Απόδειξη</u>: ($\Leftarrow$) $\exists M>0 : \forall x \in (a,b) \quad |f'(x)| \le M$ ($f'$ φραγμένη)

Έστω $x<y$ στο $(a,b)$. $\exists \xi \in (x,y) : f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \le M|x-y|$.

($\Rightarrow$) Γνωρίζουμε ότι $\exists M>0 : \forall x,y \in (a,b)$. $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$

Έστω $x_0 \in (a,b)$. Έχουμε $|f'(x_0)| = \lim\limits_{x\to x_0} \underbrace{\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|}_{\le M} \le M$

<u>SOS</u> (γ) Είναι σωστό ότι μια (συνεχής 1 / ομοιόμορφα συνεχής 2 / Lipschitz 3) συνάρτηση απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα σύνολα.

1 <u>ΟΧΙ</u> $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$

Η $f$ είναι συνεχής και $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$

φραγμένο — μη φραγμένο

$g : (0,1) \to \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{x}$

2 <u>ΟΧΙ</u> Η $f : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ $f(x) = x$

- Η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (κάθε $f : (\mathbb{R}, \delta) \to Y$ είναι ομοιομ. συνεχής)

- Το $\mathbb{R}$ είναι $\delta$-φραγμένο : $\operatorname{diam}_\delta(\mathbb{R}) = 1$
- Το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ <u>δεν</u> είναι φραγμένο ως προς την $|\cdot|$ μετρική

(3) NAI Έστω $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ Lipschitz με σταθερά $M$ και έστω $A \subseteq X$ φραγμένο, δηλ. $diam_d(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\} < \infty$ είναι φραγμένο.

Θ.δ.ο. $\boxed{diam_\sigma(f(A)) \leq M \cdot diam_d(A) < \infty} \Rightarrow f(A)$ φραγμένο.

Έχουμε $diam_\sigma(f(A)) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : x,y \in A\}$.

Έστω $x,y \in A$. Τότε $\sigma(f(x), f(y)) \leq M \cdot d(x,y) \leq M \cdot diam_d(A)$

Έπεται ότι $diam_\sigma(f(A)) \leq M \cdot diam_d(A)$

## Ισομετρίες

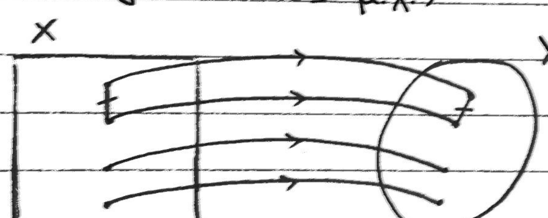
**Ορισμός**: Μια συνάρτηση $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ λέγεται ισομετρία αν $\forall x,y \in X$ : $\sigma(f(x), f(y)) = d(x,y)$ ("διατηρεί τις αποστάσεις")

## Παρατηρήσεις

(i) Κάθε ισομετρία είναι 1-1.
[Αν $f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = \sigma(f(x), f(y)) = d(x,y) \Rightarrow x = y$]

(ii) Κάθε ισομετρία είναι Lipschitz με σταθερά 1.

(iii) Αν η ισομετρία $f: X \to Y$ είναι επί, δηλ. $f(X) = Y$, τότε και η $f^{-1}$ είναι Lipschitz με σταθερά 1.
" $d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = \sigma(u,v)$ "
Τότε λέμε ότι οι $(X,d)$, $(Y,\sigma)$ ισομετρικά ισόμορφοι (ταυτίζονται ως μ.χ.)



# Ισοδύναμες μετρικές

<u>Ορισμός</u>: Έστω $d$ και $\sigma$ δύο μετρικές στο ίδιο σύνολο $X$. Λέμε ότι οι $d$ και $\sigma$ είναι <u>ισοδύναμες</u> (και γραφ. $d \sim \sigma$), αν " $\forall (x_n)$ στο $X$ και $\forall x \in X$ ισχύει $x_n \xrightarrow{d} x \iff x_n \xrightarrow{\sigma} x$ "

<u>Παρατηρήσεις</u>

(α) Θεωρούμε την $I : (X, d) \to (X, \sigma)$, $I(x) = x$
Αυτή είναι 1-1 και επί, άρα ορίζεται η $I^{-1} : (X, \sigma) \to (X, d)$ με $I^{-1}(x) = x$. Αν οι $d$ και $\sigma$ είναι ισοδύναμες, τότε οι $I, I^{-1}$ είναι συνεχείς.

· Αν $x_n \xrightarrow{d} x \overset{(d\sim\sigma)}{\Longrightarrow} x_n \xrightarrow{\sigma} x$, δηλ. $I(x_n) \xrightarrow{\sigma} I(x)$.
Από την αρχή μεταφοράς, η $I$ είναι συνεχής.

· Αν $x_n \xrightarrow{\sigma} x \overset{(d\sim\sigma)}{\Longrightarrow} x_n \xrightarrow{d} x$, δηλ. $I^{-1}(x_n) \xrightarrow{d} I^{-1}(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η $I^{-1}$ είναι συνεχής.

Ισχύει και το αντίστροφο: αν οι $I, I^{-1}$ είναι συνεχείς, τότε $d \sim \sigma$.
(π.χ. Αν $x_n \xrightarrow{d} x \overset{(I\ \text{συν.})}{\Longrightarrow} I(x_n) \xrightarrow{\sigma} I(x)$, δηλ. $x_n \xrightarrow{\sigma} x$)

(β) $d \sim \sigma \iff \forall F \subseteq X$ έχουμε $F$ $d$-κλειστό $\iff F$ $\sigma$-κλειστό.
π.χ. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $F$ κλειστό στον $(X, d)$
Έστω $(x_n)$ στο $F$ τ.ω. $x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X$. Αφού $d \sim \sigma$ έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x$
Όμως $F$ $d$-κλειστό, άρα $x \in F$.
Αυτό δ.ο. το $F$ είναι $\sigma$-κλειστό. Ομοίως, $F$ $\sigma$-κλειστό $\Rightarrow F$ $d$-κλειστό
($\Leftarrow$) Θ.δ.ο. οι $I, I^{-1}$ είναι συνεχείς και από την προηγούμενη παρατήρηση θα έχουμε $d \sim \sigma$.

(π.χ. Η $I : (X, d) \to (X, \sigma)$ είναι συνεχής.
Πράγματι, αν $F \subseteq (X, \sigma)$ κλειστό $\Rightarrow I^{-1}(F) = F$ είναι $d$-κλειστό.
Ομοίως η $I^{-1}$ είναι συνεχής)

## Θεώρημα

Έστω $d$ και $\sigma$ δύο μετρικές στο ίδιο σύνολο $X$. Τ.α.ε.ι.:

(α) Η $d$ είναι ισοδύναμη με την $\sigma$

(β) Οι $I : (X, d) \to (X, \sigma)$, $I(x) = x$ και $I^{-1} : (X, \sigma) \to (X, d)$ είναι συνεχείς

(γ) Για κάθε $F \subseteq X$ έχουμε $F$ $d$-κλειστό $\iff$ $F$ $\sigma$-κλειστό.

(δ) Για κάθε $G \subseteq X$ έχουμε $G$ $d$-ανοικτό $\iff$ $G$ $\sigma$-ανοικτό.

## Πρόταση (άσκηση)

Κάθε μετρική είναι ισοδύναμη με μια φραγμένη μετρική.

Απόδειξη: Έστω $(X, d)$ μ.χ. Ορίζουμε $\sigma(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ [Έχουμε δει ότι η $\sigma$ είναι μετρική στις ασκήσεις κεφ.1]

- Η $\sigma$ είναι φραγμένη: $\forall x,y \in X$ $\sigma(x,y) \leq 1$
- Δ.ο. $d \sim \sigma$.

(i) Αν $d(x_n, x) \to 0$ (δηλ. $x_n \xrightarrow{d} x$) δ.ο. $\sigma(x_n, x) = \dfrac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \to \dfrac{0}{1+0} = 0$

(ii) Αν $\sigma(x_n,x) \to 0 \Rightarrow \dfrac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \to 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+d(x_n,x)} \to 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+d(x_n,x)} \to 1 \Rightarrow 1 + d(x_n,x) \to 1 \Rightarrow d(x_n,x) \to 0.$

$a_n \geq 0$ και $\dfrac{a_n}{1+a_n} \to 0$ $\Rightarrow a_n \to 0$. Άσκηση

## Ομοιομορφισμός

**Ορισμός**: Έστω $(X, d)$ και $(Y, \sigma)$ δύο μετρικοί χώροι.
Μια συνάρτηση $f: (X, d) \to (Y, \sigma)$ λέγεται **ομοιομορφισμός**, αν είναι 1-1 και επί και οι $f, f^{-1}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.
Λέμε ότι δύο μετρικοί χώροι $(X, d)$ και $(Y, \sigma)$ είναι **ομοιομορφικοί**, αν $\exists$ ομοιομορφισμός $f: X \to Y$

### Παράδειγμα

Αν $d \sim \sigma$ ισοδύναμες μετρικές στο σύνολο $X$.
Τότε οι $(X, d)$ και $(X, \sigma)$ είναι ομοιομορφικοί.
Η $I: (X, d) \to (X, \sigma)$ είναι ομοιομορφισμός (από τα προηγ.)

### Θεώρημα

Έστω $f: (X, d) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} (Y, \sigma)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Η $f$ είναι ομοιομορφισμός
(β) Για κάθε $(x_n)$ στο $X$ και $\forall x \in X$ " $x_n \xrightarrow{d} x \iff f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$ "
(γ) Για κάθε $G \subseteq X$ έχουμε $G$ $d$-ανοικτό $\iff f(G)$ $\sigma$-ανοικτό
(δ) Για κάθε $F \subseteq X$ έχουμε $F$ $d$-κλειστό $\iff f(F)$ $\sigma$-κλειστό

**Απόδειξη**: Όπως στο προηγούμενο θεώρημα

### Άσκηση 19

Εξετάστε αν είναι ομοιομορφικοί οι μ.χ. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ (με τη συνήθη μετρική).

Λύση: · Ο $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικός με τους $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$,
γιατί δεν υπάρχει (καν) 1-1 και επί συνάρτηση
$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
αριθμήσιμα υπεραριθμήσιμο
(" λόγω μεγέθους ")

· $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ - όχι

· $\mathbb{Q}, \mathbb{N}$ - όχι

· $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ - ναι

Οι $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z}$ δεν είναι ομοιομορφικοί (ομοίως οι $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{N}$ δεν είναι)

Έστω $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ομοιομορφισμός

(δηλ. $f$ είναι 1-1 & επί, $f, f^{-1}$ συνεχείς) $\mathbb{Z}' = \emptyset$ $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \to x = 0$ $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

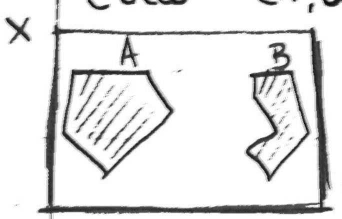
Η $f$ είναι συνεχής, άρα $f(x_n) \to f(x)$.
Όμως, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία ακεραίων, και αφού είναι συγκλίνουσα θα είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(x)$.
Δηλ. $\exists n_0$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $f(x_n) = f(x) \xRightarrow{f\ 1\text{-}1} \forall n \geq n_0\ x_n = x$
δηλ. $\frac{1}{n} = 0$ άτοπο

Οι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{N}$ είναι ομοιομορφικοί

Το $\mathbb{Z}$ και το $\mathbb{N}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα.
Θεωρούμε τυχούσα $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} \mathbb{Z}$.
Γνωρίζουμε ότι κάθε $g: \mathbb{N} \to (Y, \sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
$\Rightarrow$ $f$ συνεχής. και κάθε $h: \mathbb{Z} \to (X, d)$ - " -
$\Rightarrow f^{-1}$ συνεχής

# Το Λήμμα του Urysohm

Έστω $(X, d)$ μ.χ. και $A, B$ κλειστά υποσύνολα του $X$ τ.ω. $A \cap B = \emptyset$. Τότε, υπάρχει $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνεχής με τις εξής ιδιότητες:




(1) $\forall x \in X \quad , \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

(2) $\forall x \in A \; , \quad f(x) = 0$

(3) $\forall x \in B \; , \quad f(x) = 1$

Απόδειξη : Ορίζουμε $f(x) = \dfrac{dist(x, A)}{dist(x, A) + dist(x, B)} = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$

- Αν $d(x, A) + d(x, B) = 0 \Rightarrow d(x, A) = d(x, B) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \underset{\text{A κλειστό}}{\bar{A} = A}$ και $x \in \underset{\text{B κλειστό}}{\bar{B} = B} \Rightarrow x \in \underset{\emptyset}{A \cap B}$ , άτοπο

Άρα $\forall x \in X$ έχουμε $d(x, A) + d(x, B) > 0$ και η $f$ είναι καλά ορισμένη.

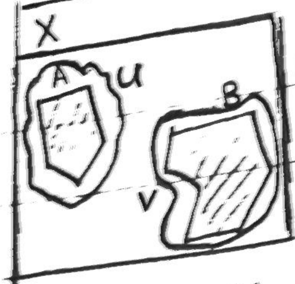
- Οι $d(x, A)$ και $d(x, B)$ είναι συνεχείς (Lipschitz με σταθ. 1)
- Προφανώς, $0 \leq f(x) \leq 1$
- Αν $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
- Αν $x \in B \Rightarrow d(x, B) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + \underset{0}{d(x, B)}} = 1$

## Εφαρμογή (ισχυρότερη από άσκηση του Κεφ. 3)

Έστω $A, B \subseteq X$ κλειστά με $A \cap B = \emptyset$.

Ν.δ.ο. $\exists \; U, V \subseteq X$ ανοικτά τ.ω. $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

Λύση: Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει συνεχής $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ τ.ω. $f|_A\equiv 0$ και $f|_B\equiv 1$




Ορίζουμε $U=\{x\in X: f(x)<1/3\}=f^{-1}\left(\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\right)=$ ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα ανοικτού μέσω της συνεχούς $f$ και $A\subseteq U$ (αν $x\in A \Rightarrow f(x)=0<1/3$)

Ορίζουμε $V=\left\{x\in X: f(x)>\frac{2}{3}\right\}$ Ομοίως το $V$ είναι ανοικτό

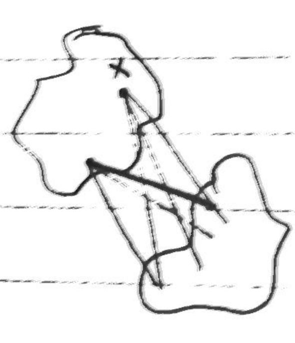
και $B\subseteq V$. Μένει ν.δ.ο. $\bar{U}\cap\bar{V}=\emptyset$.

Έστω $x\in\bar{U}$. $\exists\, x_n\in U$ τ.ω. $x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$
και $\forall n$ $f(x_n)<\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)\le\frac{1}{3}$, δηλ. $\bar{U}\subseteq\left\{x\in X: f(x)\le\frac{1}{3}\right\}$

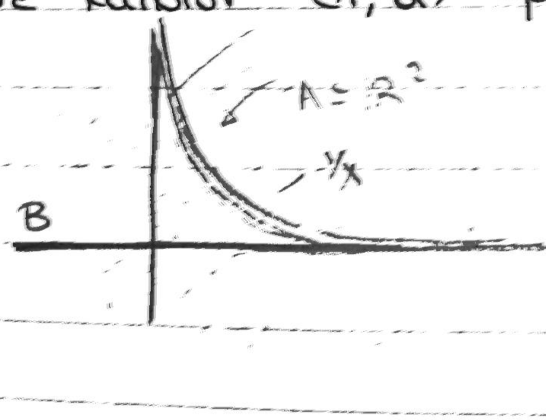
Ομοίως, $\bar{V}\subseteq\left\{x\in X: f(x)\ge\frac{2}{3}\right\}$.

Ερώτηση: Αν $A,B\subseteq(X,d)$ μη κενά, η απόσταση των $A$ και $B$

είναι ο αριθμός $\mathrm{dist}(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A,\ y\in B\}$




Υπάρχουν παραδείγματα ξένων κλειστών $A,B$ σε κάποιον $(X,d)$ με $\mathrm{dist}(A,B)=0$;




$A\cap B=\emptyset$