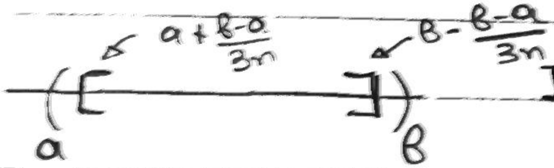
26/10/21

Ασκήσεις (Κεφαλαίου 3)

④ (β) Κάθε ανοικτό διάστημα γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.

Λύση: 

$$I_n = \left[\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n},\ \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n}\right]$$

Ισχύει ότι $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} < \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ισχυρισμός: $(\alpha,\beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

"$\supseteq$" $\forall n \quad I_n \subseteq (\alpha,\beta) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq (\alpha,\beta)$

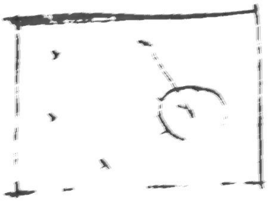
"$\subseteq$" Έστω $x \in (\alpha,\beta)$. Τότε $\alpha < x < \beta$.

- $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} \longrightarrow \alpha < x \Longrightarrow$ για μεγάλο n, $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} < x$

- $\beta - \frac{\beta-\alpha}{3n} \longrightarrow \beta > x \Longrightarrow$ για μεγάλο n, $x < \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n}$

Δηλαδή, για μεγάλα n, $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} < x < \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n} \Longrightarrow x \in I_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

⑤ Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $A\subseteq(X,d)$ είναι κλειστό.



Λύση: Δ.ο. πρώτα το $\{x\}$ είναι κλειστό $\forall x\in X$.
Έστω $u_n\in\{x\}$ και $u_n\to u$
Έχουμε αναγκαστικά $u_n=x$ $\forall n$,
δηλ. η (u_n) είναι σταθερή ίση με x και συγκλίνει στο x.
Δηλ. $u=x\in\{x\}$.
Αν $A=\{x_1,\dots\dots,x_m\}$ πεπερασμένο σύνολο, τότε
$A=\underbrace{\{x_1\}}_{\text{κλειστό}}\cup\dots\dots\cup\underbrace{\{x_m\}}_{\text{κλειστό}}$ = κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων.

② Ν.δ.ο. κάθε $A\subseteq(X,d)$ γράφεται ως τομή ανοιχτών συνόλων

Λύση: • Έστω $B\subseteq X$. Τότε $B=\bigcup_{x\in B}\{x\}$ = ένωση κλειστών

• Έστω $A\subseteq X$. Γράφουμε $\underset{\overset{\shortparallel}{B}}{X\setminus A}=\bigcup_{i\in I}F_i$, F_i κλειστά $\Rightarrow$

$\Rightarrow A=(X\setminus A)^c=\bigcap_{i\in I}\underbrace{F_i^c}_{=G_i}$ ανοικτό

⑩ Έστω $A,B\subseteq(X,d)$
(α) Αν $A\cup B=X \Rightarrow \bar{A}\cup B^\circ=X$
(β) Αν $A\cap B=\emptyset \Rightarrow \bar{A}\cap B^\circ=\emptyset$

Λύση:

(α): "$\subseteq$" Προφανές (ο X είναι ο χώρος)
"$\supseteq$" Έστω $x\in X$. Υποθέτουμε ότι $x\notin\bar{A}$ και θ.δ.ο. $x\in B^\circ$. Αφού $x\notin\bar{A}$ $\exists\,\delta>0$ τω. $B(x,\delta)\cap A=\emptyset \overset{A\cup B=X}{\Longrightarrow} B(x,\delta)\subseteq B \Rightarrow x\in B^\circ$.
[$y\in B(x,\delta)\Rightarrow y\notin A$ και $y\in \underset{\overset{\shortparallel}{X}}{A\cup B}\Rightarrow y\in B$]

Προσοχή: Από την $A\cup B=X$
$\not\Rightarrow B=X\setminus A$

(β) Έστω $x \in \bar{A} \cap B^\circ$

· Αφού $x \in B^\circ$, $\exists \delta_1 > 0 : B(x,\delta_1) \subseteq B$

· Αφού $x \in \bar{A}$, $\forall \delta > 0 : B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$.

Ειδικότερα, $B(x,\delta_1) \cap A \neq \emptyset$. άτοπο. διότι παίρνω $y \in B(x,\delta_1) \cap A$ $\Rightarrow \boxed{y \in A}$ και $y \in B(x,\delta_1) \subseteq B \Rightarrow \boxed{y \in B}$. Άρα $A \cap B \neq \emptyset$ άτοπο

(11) Για κάθε $A, B \subseteq (X,d)$:

(α) $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$ και (β) $\bar{A} \setminus \bar{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$

Λύση: (α) Έστω $x \in (A \setminus B)^\circ$: $\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq A \setminus B = A \cap B^c \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x,\delta) \subseteq A$ και $B(x,\delta) \subseteq B^c$

$\Downarrow$ $\boxed{x \in A^\circ}$

$\Downarrow$ $x \in (B^c)^\circ = (X \setminus B)^\circ = X \setminus \bar{B}$ (θεώρημα)

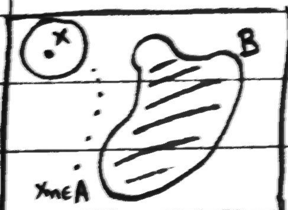
$\Downarrow$ $x \notin \bar{B} \Rightarrow x \notin B^\circ$ (αφού $B^\circ \subseteq B \subseteq \bar{B}$)

> Σημείωση: Αυτό που δείξαμε είναι ισχυρότερο, $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus \bar{B}$

(β) Έστω $x \in \bar{A} \setminus \bar{B}$

· 1ος τρόπος: Παίρνω τυχόν $\delta > 0$ και δ.ο. $B(x,\delta) \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$

· 2ος τρόπος: Βρίσκω $x_n \in A \setminus B$ τ.ω. $x_n \to x$.



$\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \cap B = \emptyset$ (γιατί $x \notin \bar{B}$) (*)

Υπάρχουν $x_n \in A$ τ.ω. $x_n \to x$ (γιατί $x \in \bar{A}$)

Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $x_n \in B(x,\delta) \xRightarrow{(*)}$ $\forall n \geq n_0$ $x_n \notin B$. Συνεπώς, το τελικό τμήμα της $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ είναι στο $A \setminus B$ και συγκλίνει στο x.

⑥ Κάθε σφαίρα $S(x,r) = \{y \in X : d(y,x) = r\}$ είναι κλειστό σύνολο.
Μπορεί να συμβεί $S(x,r) = \phi$;

<u>Λύση</u>: • $X \setminus S(x,r) = \underset{d(y,x)<r}{B(x,r)} \cup (X \setminus \underset{d(y,x)>r}{\hat{B}(x,r)})$ = ανοικτό, γιατί

$B(x,r)$ ανοικτό και $\hat{B}(x,r)$ κλειστό $\Rightarrow X \setminus \hat{B}(x,r)$ ανοικτό

<u>Άλλος τρόπος</u>: Θεωρούμε $y_n \in S(x,r)$ τω. $y_n \to y \in X$.
Τότε $\underset{=r}{d(y_n, x)} \to d(y,x)$. Άρα $d(y,x) = r \Rightarrow y \in S(x,r)$

$\boxed{|d(y,x) - d(y_n,x)| \le \underset{0}{d(y_n,y)}}$

Μπορεί $S(x,r) = \phi$ σε κάποιους μ.χ.
Στον (X,δ) $\forall x \in X$: $S(x, 1/2) = \phi$ <u>και</u> $S(x,3) = \phi$

(γιατί $x \neq y \Rightarrow \delta(x,y) = 1$)
Αυτό <u>δεν</u> μπορεί να γίνει σε χώρους με νόρμα.

⑦ Έστω (X, d) μ.χ., $x \in X$ και $\varepsilon > 0$.
Εξετάστε αν ισχύει πάντοτε $\overline{B(x,\varepsilon)} = \hat{B}(x,\varepsilon)$

<u>Λύση</u>: • $B(x,\varepsilon) \subseteq \underset{\text{κλειστό}}{\hat{B}(x,\varepsilon)} \Rightarrow \overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon)$
<u>Υπενθύμιση</u>: Αν $A \subseteq F$ και F κλειστό $\Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

$\hat{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) \le \varepsilon\}$
$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\}$

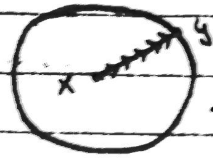
Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει πάντα.
Στον (X,δ) και $x \in X \Rightarrow \underset{\text{κλειστό και ανοιχτό}}{B(x,1) = \{x\}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{B(x,1)} = \{x\}$.
Όμως, $\hat{B}(x,1) = X \neq \{x\} = \overline{B(x,1)}$
↳ αν το X έχει παραπάνω από ένα στοιχεία.

(15) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Ν.δ.ο: $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0$ ισχύει $\overline{B(x,\varepsilon)} = \hat{B}(x,\varepsilon)$

<u>Λύση</u>: Έχουμε δο $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon)$ (σε κάθε μχ)

Θεωρούμε $y \in \hat{B}(x,\varepsilon)$ και δ.ο. $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$



• Αν $y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$ (γιατί γενικά $A \subseteq \overline{A}$)

• Θεωρούμε $y \in S(x,\varepsilon)$, δηλ. $\|y-x\| = \varepsilon$

Παίρνουμε σημεία $z_t = (1-t)x + ty$, όπου $0<t<1$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $z_t \in B(x,\varepsilon)$

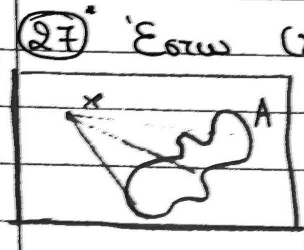
Έχουμε $\|z_t - x\| = \|(1-t)x + ty - x\| = \|-tx + ty\| = \|t(y-x)\| =$
$= t\|y-x\| = t\varepsilon < \varepsilon$.

Θεωρούμε $y_n = z_{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x + \left(1-\frac{1}{n}\right)y \in B(x,\varepsilon)$ (από τον ισχυρισμό)

<u>Ισχυρισμός</u>: $y_n \to y$. Άρα, $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$

Έχουμε $\|y - y_n\| = \|y - 1/n\, x - (1 - 1/n)y\| = \|-1/n\, x + 1/n\, y\| =$
$= \left\| \frac{1}{n}(y-x) \right\| = \frac{1}{n}\|y-x\| = \frac{1}{n}\cdot\varepsilon \to 0$

(27) Έστω (X,d) μχ και $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$



Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$ την <u>απόσταση του x από το A</u>.

(α) $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$

(β) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \ \forall x,y \in X$

(γ) Το $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό και το $B_\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό

(δ) Αν $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \Rightarrow \forall x \in X \ d(x,B) = d(x,A)$.

Λύση: (α) $d(x,A)=0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists y\in A$ τ.ω. $d(y,x)<\varepsilon \overset{(1)}{\Rightarrow}$

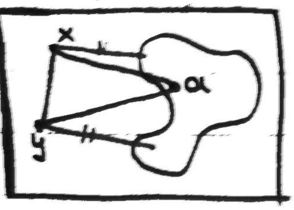
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \Leftrightarrow x\in\bar{A}$

Για την πρώτη "$\Leftarrow$": το $\{d(x,y): y\in A\}\subseteq[0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\inf\{d(x,y):y\in A\}}_{=\, d(x,A)} \geq 0$. Όμως, $d(x,A)\le d(x,y)\ \forall y\in A$

και λόγω της (1): $d(x,A)<\varepsilon\ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow d(x,A)\le 0$.

(β)



Θεωρούμε τυχόν $a\in A$. Έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a) \\ \text{Επίσης: } d(x,A)\le d(x,a)\end{array}\right\} \Rightarrow d(x,A)\le d(x,y)+d(y,a)$

$\Downarrow$

$\underbrace{d(x,A)-d(x,y)}_{\text{σταθερό}}\le d(y,a)\quad \forall a\in A$

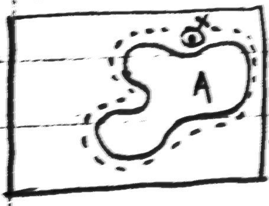
$\Rightarrow d(x,A)-d(x,y)\le\inf\{d(y,a):a\in A\}=d(y,A)$

Δηλ. $d(x,A)-d(y,A)\le d(x,y)$

Λόγω συμμετρίας, ισχύει και η $d(y,A)-d(x,A)\le d(x,y)$

Άρα έχουμε το (β).

(γ) Έστω $x\in A_\varepsilon$. Τότε $d(x,A)<\varepsilon$. Παίρνουμε $\boxed{\delta=\varepsilon-d(x,A)>0}$



Αν $y\in B(x,\delta)$ από το (β) έχουμε

$d(y,A)\le d(y,x)+d(x,A)<\delta+d(x,A)=\varepsilon$.

Άρα $y\in A_\varepsilon$, δηλ. $\exists\delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta)\subseteq A_\varepsilon$.

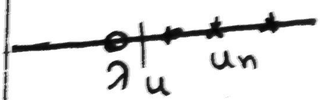
$B_\varepsilon=\{x\in X: d(x,A)\le\varepsilon\}$ κλειστό.

Έστω $x_n\in B_\varepsilon$ και $x_n\to x\in X$.

Τότε $d(x,A)\overset{(\beta)}{\le} d(x,x_n)+d(x_n,A)\le d(x,x_n)+\varepsilon \to \varepsilon$

διατί $x_n\in B_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,B)\le\varepsilon$ διατί $x_n\to x \Rightarrow d(x_n,x)\to 0$

Έπεται ότι $d(x,A)\le\varepsilon \Rightarrow x\in B_\varepsilon$.



$\left.\begin{array}{l} : \lambda\le u_n \\ u_n\to u\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\le u$

Παρατήρηση: $A\subseteq B \Rightarrow \{d(x,y): y\in A\} \subseteq \{d(x,y): y\in B\}$
$\Rightarrow \inf\{d(x,y): y\in B\} \le \inf\{d(x,y): y\in A\} \Rightarrow d(x,B) \le d(x,A)$

(δ) Εδώ $\forall x\in X \quad d(x,\bar{A})\le d(x,B)\le d(x,A)$

Για να τελειώσει η άσκηση α.ν.δο. $d(x,A)\le d(x,\bar{A})$

Έστω $y\in\bar{A}$ και έστω $\varepsilon>0$. $\exists z\in A$ τω. $d(y,z)<\varepsilon$

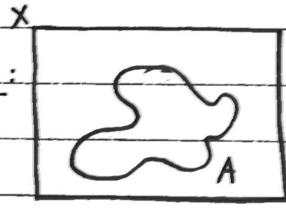
Άρα $d(x,A)\le d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)<d(x,y)+\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,A)-\varepsilon < d(x,y) \quad \forall y\in\bar{A} \Rightarrow d(x,A)-\varepsilon\le \inf\{d(x,y):y\in\bar{A}\}$

$\Rightarrow d(x,A)-\varepsilon \le d(x,\bar{A})$. $\quad$ $d(x,\bar{A})$

Αφού αυτό ισχύει $\forall\varepsilon>0$ έπεται $d(x,A)\le d(x,\bar{A})$

(29) Έστω (X,d) μ.χ. Κάθε κλειστό $A\subseteq X$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων.
Επίσης, κάθε ανοικτό $B\subseteq X$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.



Λύση: $\forall n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $G_n=\{x\in X: d(x,A)<\frac{1}{n}\}$
Στο (γ) της προηγούμενης άσκησης (27) είδαμε ότι κάθε G_n είναι ανοικτό.

Ισχυρισμός: $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n=\bar{A}$ (και επειδή A κλειστό $\bar{A}=A$, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = A$)

• $\bar{A} \underset{27(a)}{=} \{x\in X: d(x,A)=0\}\subseteq\{x\in X: d(x,A)<\frac{1}{n}\}=G_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Άρα $\bar{A}\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$

• Αντίστροφα, αν $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ τότε $\forall n \quad 0\le d(x,A)<\frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,A)=0 \overset{27(a)}{\Rightarrow} x\in\bar{A}$.

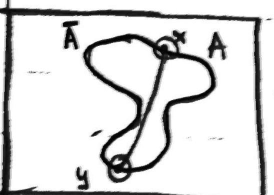
Έστω B ανοικτό $\Rightarrow X\setminus B$ κλειστό $\Rightarrow X\setminus B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n ανοικτό
$\Rightarrow B = (X\setminus B)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c$ και το $F_n := G_n^c$ κλειστό.

__Ορολογία__

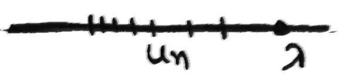
G_δ - σύνολο είναι μια αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων
F_δ - σύνολο είναι μια αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων

Η Άσκηση 29 μας λέει ότι σε κάθε μ.χ. τα κλειστά σύνολα είναι G_δ - σύνολα και τα ανοιχτά σύνολα είναι F_δ - σύνολα

(12) (X,d) μ.χ. $\emptyset \neq A \subseteq X$. Τότε $diam(\bar{A}) = diam(A)$.
(*) Ισχύει ότι $diam(A^\circ) = diam(A)$;



__Λύση__: Γενικά, $A \subseteq B \Rightarrow diam(A) \leq diam(B)$
"supremum πάνω από περισσότερα ζευγάρια δεξιά"
__Άρα__ $diam(A) \leq diam(\bar{A})$
Έστω $x,y \in \bar{A}$. Υπάρχουν ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στο A τ.ω.
$x_n \to x$ και $y_n \to y$.
__Τότε__: ① $d(x_n,y_n) \leq diam(A)$ $\forall n$, γιατί $x_n, y_n \in A$
② $d(x_n,y_n) \longrightarrow d(x,y)$ βγαίνει με την ανισότητα 4 σημείων



$u_n \leq \lambda$ ξ $u_n \to u$
$\Rightarrow u \leq \lambda$

Από ① ξ ② $d(x,y) \leq diam(A)$
Αφού τα $x,y \in \bar{A}$ ήταν τυχόντα,
$diam(\bar{A}) = \sup\{d(x,y) : x,y \in \bar{A}\} \leq diam(A)$

Παράδειγμα (στο $\mathbb{R}$) όπου $\operatorname{diam}(A^\circ) < \operatorname{diam}(A)$

$A = (0,1) \cup \{4\}$

$\operatorname{diam}(A) = 4$

$A^\circ = (0,1)$ $\quad \operatorname{diam}(A^\circ) = 1 < \operatorname{diam}(A) = 4$

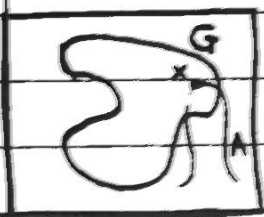
(17) $G \subseteq (X,d)$. Ν.δ.ο τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) G ανοικτό

(β) $\forall A \subseteq X \quad G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$

(γ) $\forall A \subseteq X \quad \overline{G \cap \bar{A}} = \overline{G \cap A}$

Λύση: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x \in G \cap \bar{A}$. Αφού $x \in \bar{A}$ $\exists (x_n)$ στο A τω $x_n \to x$. Αφού $x \in G$ και το G ανοικτό ξέρουμε ότι $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ x_n \in G$.



(χαρακτηρισμός ανοικτού συνόλου με ακολουθίες)

Δηλ. η $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ είναι στο $G \cap A$ και συγκλίνει στο x

$\Rightarrow x \in \overline{G \cap A}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $A \subseteq X$. Έχουμε $G \cap \bar{A} \subseteq \underbrace{\overline{G \cap A}}_{\text{κλειστό}} \overset{(β)}{\Longrightarrow} \overline{G \cap \bar{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$

$\left.\begin{array}{l} B \subseteq F \\ F \text{ κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{B} \subseteq F$

Αντίστροφα, $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow G \cap A \subseteq G \cap \bar{A} \xRightarrow[\text{κλειστής θήκης}]{\text{μονοτ.}} \overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \bar{A}}$

(γ) $\Rightarrow$ (α) Παίρνω $A = G^c$. Εφαρμόζω την υπόθεση:

$G \cap \overline{(X \setminus G)} = \overline{G \cap (X \setminus G)} = \bar{\emptyset} = \emptyset \Rightarrow G \cap \overline{(X \setminus G)} = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X \setminus G} \subseteq X \setminus G \Rightarrow X \setminus G$ κλειστό $\Rightarrow G$ ανοικτό.