5/10/21

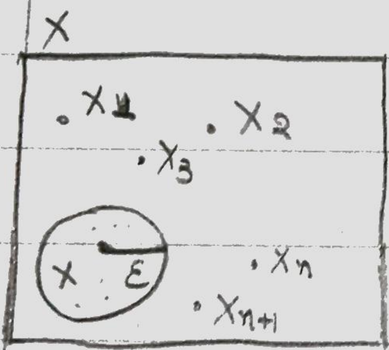
Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους

Έστω $\phi \neq \Omega$. **Ακολουθία** στο Ω είναι μια συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to \Omega$.

Όροι της ακολουθίας είναι οι τιμές $x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots$ που τους γράφουμε $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Την ακολουθία την συμβολίζουμε με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_n$, (x_n)

Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Μας ενδιαφέρουν **ακολουθίες στο X**.



Ορισμός: Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d) και $x \in X$. Λέμε ότι η **(x_n) συγκλίνει στο x** και γράφουμε $x_n \to x$, αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ ισχύει $\boxed{d(x_n, x) < \varepsilon} \iff \forall n \geq n_0$ ισχύει $\boxed{x_n \in B(x, \varepsilon)}$

Βασικές Προτάσεις

Πρόταση 1

$x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0$

Πρόταση 2 (Μοναδικότητα Ορίου)

Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y \Rightarrow x = y$

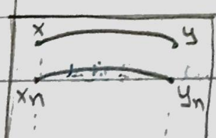
Πρόταση 3

Αν $x_n \to x \Rightarrow$ η (x_n) είναι φραγμένη

(δηλ. $\exists\, M > 0$ και $x_0 \in X$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B(x_0, M)$
Ισοδύναμα: αν το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X)

Πρόταση 4

Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

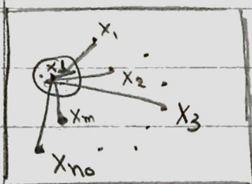


Αποδείξεις (Π.1): $x_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ d(x_n, x) < \varepsilon$
$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon \iff d(x_n, x) \to 0$
άn

(Π.2): Έστω $\varepsilon > 0$. Θ.δ.ο. $0 \leq d(x, y) < \varepsilon$ και αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχόν έχουμε $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Αφού $x_n \to x$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1$ $d(x_n, x) < \varepsilon/2$
Αφού $x_n \to y$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_2$ $d(x_n, y) < \varepsilon/2$
Παίρνουμε $N \geq \max\{n_1, n_2\}$.
Τότε $d(x,y) \leq d(x_N, x) + d(x_N, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow 0 \leq d(x,y) < \varepsilon$.

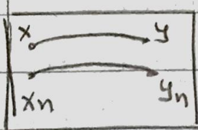
(Π.3): Παίρνουμε $\varepsilon = 1$. Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ $d(x_n, x) < 1$.



Παίρνουμε $M > \max\{1, d(x_1, x), \ldots\ldots, d(x_{n_0}, x)\}$
Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(x_n, x) < M$ άρα η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
- $n > n_0$: Τότε $d(x_n, x) < 1 < M$
- $n \leq n_0$: Απο τον ορισμό του M
$d(\underbrace{x_n}_{x_n \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}}, x) \leq \max\{1, d(x_1, x), \ldots\ldots, d(x_{n_0}, x)\} < M$.

(Π.4): Έχουμε την ανισότητα των τεσσάρων σημείων

$$|\underbrace{d(x_n, y_n)}_{b_n} - \underbrace{d(x,y)}_{b}| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \xrightarrow{\text{Π.1}} 0 + 0 = 0$$



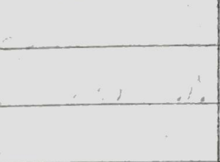
Άρα $b_n = d(x_n, y_n) \to d(x,y) = b$

Άσκηση

Στον (X, δ) (διακριτό μ.χ.) μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα ανν είναι τελικά σταθερή.

Ορισμός: Η (x_n) λέγεται τελικά σταθερή, αν $\exists x \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ $x_n = x$

Υπενθύμιση: $\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases}$



Αν $0 < \varepsilon \leq 1$ τότε $B(x, \varepsilon) = \{x\}$

Λύση: ($\Rightarrow$) Έστω ότι $x_n \xrightarrow{\delta} x$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1/2$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\delta(x_n, x) < 1/2$ ($\Leftrightarrow x_n \in B(x, 1/2)$) $\xRightarrow{\delta = 0 \text{ ή } 1}$ $\forall n \geq n_0$ $\delta(x_n, x) = 0$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n = x$.

($\Leftarrow$) Ισχύει σε κάθε μ.χ. Έστω (x_n) τελικά σταθερή ακολουθία
$\exists x \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $x_n = x$. Θ.δ.ο. $x_n \to x$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Για το n_0 που ορίσαμε παραπάνω έχουμε ότι
$d(x_n, x) = 0 < \varepsilon$ (αφού $x_n = x$)

Σημείωση: ① "Άλγεβρα" των ορίων δεν έχει νόημα να μελετήσουμε σε τυχόντα (X, d):
π.χ. αν $x_n \to x$ ξ $y_n \to y$ "δεν μπορώ να μιλήσω για την $x_n + y_n$" - πρόσθεση στον (X, d) γενικά δεν υπάρχει.
② Σε γενικό (X, d) δεν έχουμε διάταξη ($\leq$, ανισότητες) και κατ' επέκταση δεν μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της αύξουσας ή φθίνουσας ακολουθίας.
③ Σε χώρο με νόρμα έχουμε "κάποια άλγεβρα ορίων".
Αν (x_n), (y_n) είναι δύο ακολουθίες στον $(X, \|\cdot\|)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι $x_n + y_n$, λx_n
Επαγόμενη μετρική: $d(x,y) \overset{\text{ορσ}}{=} \|x - y\|$ και $x_n \xrightarrow{\text{π.δ}} x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$
Τώρα, αν $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq$
$\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 + 0 = 0$, δηλ. $x_n + y_n \to x + y$
Ομοίως, $\|\lambda x_n - \lambda x\| = \|\lambda(x_n - x)\| = |\lambda| \|x_n - x\| \to 0$, δηλ. $\lambda x_n \to \lambda x$

Βασικές Ακολουθίες (ακολουθίες Cauchy)

Ορισμός: Έστω (X, d) μ.χ. και (x_n) ακολουθία στο X.
Η (x_n) λέγεται βασική, αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n, m \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Απειροστικός ΙΙ : (x_n) βασική $\Longleftrightarrow$ (x_n) συγκλίνουσα

- Η "$\Leftarrow$" ισχύει σε κάθε μ.χ.
- Η "$\Rightarrow$" <u>δεν</u> ισχύει σε κάθε μ.χ.

Βασικές Προτάσεις

Πρόταση 5

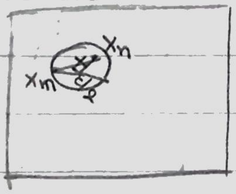
Αν $x_n \to x \Rightarrow$ η (x_n) είναι βασική.

Πρόταση 6

Αν (x_n) είναι βασική $\Rightarrow$ (x_n) είναι φραγμένη

(Αυτές οι δύο προτάσεις ισχύουν σε κάθε μ.χ.)

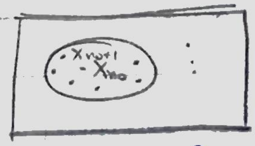
<u>Αποδείξεις</u> (Π.5):



Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $d(x_n, x) < \varepsilon/2$
Έστω $n, m \geq n_0$. Έχουμε:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(Π.6): <u>Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$</u>. Αφού η (x_n) είναι βασική $\exists n_0 \in \mathbb{N}$
$\forall n, m \geq n_0$: $d(x_n, x_m) < 1$.
<u>Ειδικότερα</u>, $\forall n \geq n_0$ $d(x_n, x_{n_0}) < 1$



αυτό δεν σημ ότι $x_n \to x_{n_0}$

Ορίζουμε $M > \max\{1, d(x_1, x_{n_0}), \ldots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$
Διακρίνοντας περιπτώσεις βλέπαμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(x_n, x_{n_0}) < M$
Άρα, η (x_n) είναι φραγμένη.

Παραδείγματα (Βασικές Ακολουθίες που δεν συγκλίνουν)

(α) Θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ με μετρική την $|p-q|$
(βλέπουμε το $\mathbb{Q}$ σαν μ. υπόχωρο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)
Θέτουμε $q_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$

Παρατήρηση: Στον $\mathbb{R}$ έχουμε $q_n \xrightarrow{|\cdot|} e \notin \mathbb{Q}$

- Εδώ έχουμε δυο μ.χ. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και τον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$
- Αφού $q_n \to e$ στο $\mathbb{R}$, η (q_n) είναι βασική στο $\mathbb{R}$.
- Δηλ. $\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq n_0 \quad |q_n - q_m| < \varepsilon$ στο $\mathbb{R}$.

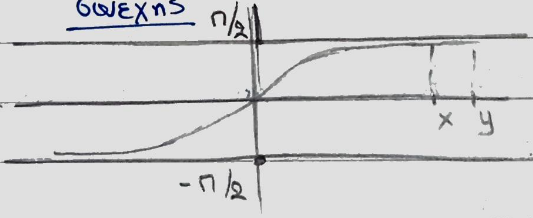
$$\Downarrow$$

η (q_n) είναι βασική στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

- Όμως, η (q_n) δεν είναι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Έστω ότι είναι. Τότε $\exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $|q_n - q| \to 0 \Rightarrow q_n \xrightarrow{|\cdot|} q$
Όμως, $q_n \to e$ στο $\mathbb{R}$. Άρα $e = q$ στο $\mathbb{R}$, δηλ. $e \in \mathbb{Q}$ άτοπ

(β) Θεωρούμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan$
Η f είναι 1-1 (γν. αύξουσα), δηλ. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$.
συνεχής



Η $d(x,y) \overset{\text{ορσ}}{=} |f(x) - f(y)| = |\arctan x - \arctan$
είναι μετρική.

Παρατήρηση: $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$
(i) Η (x_n) είναι βασική στον $(\mathbb{R}, d)$
Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq n_0 \quad |\arctan x - \pi/2| < \varepsilon/2$.

Αν $n, m \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) = d(n,m) = |\arctan n - \arctan m| \leq$
$\leq |\arctan n - \pi/2| + |\pi/2 - \arctan m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(2) Έστω ότι $x_n = n \xrightarrow{d} y \in \mathbb{R}$

Τότε $d(n,y) \to 0 \Rightarrow |\arctan n - \arctan y| \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \arctan y = \arctan n - (\arctan n - \arctan y) \to \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Άρα, $\arctan y = \frac{\pi}{2}$ άτοπο, διότι η arctan δεν παίρνει την τιμή $\frac{\pi}{2}$. Δηλ. βρήκαμε βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, d)$ η οποία δεν συγκλίνει.

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X,d) λέγεται πλήρης, αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στο X είναι συγκλίνουσα.

(*) Είδαμε ότι υπάρχουν μ.χ. που δεν είναι πλήρεις ($(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}, d)$)

Υπακολουθίες

Ορισμός: Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d). Υπακολουθία της (x_n) είναι κάθε ακολουθία $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$ όπου $k_n \in \mathbb{N}$ $k_1 < k_2 < \ldots$

Αυστηρά: $\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{x} X$, $(x \circ k)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$.
k γν. αύξουσα

Υπακολουθία υπακολουθίας: $\mathbb{N} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{x} X$
$(x \circ k \circ \lambda)(n) = x \circ k(\lambda_n) = x(k_{\lambda_n}) = x_{k_{\lambda_n}}$

Πρόταση 7

Αν $x_n \to x \Rightarrow$ κάθε υπακολουθία της $x_{k_n} \to x$

Πρόταση 8

Αν (x_n) είναι βασική και κάποια $x_{k_n} \to x \Rightarrow x_n \to x$

Ισχύουν σε κάθε μ.χ.

Λήμμα: Αν (k_n) είναι γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε $k_n \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

[Απει. II : με επαγωγή ως προς το n αποδεικνύεται]

Αποδείξεις (Π.7): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:
(*) " αν $s \geq n_0$ τότε $d(x_s, x) < \varepsilon$ ". Έστω $n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{k_n}_{s} \geq n \geq n_0$
Από τη (*) με $s = k_n$ έχουμε $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon$.
Άρα $x_{k_n} \to x$.
(Π.8): Έστω $\varepsilon > 0$.
- $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall s, k \geq n_1$ $d(x_s, x_k) < \varepsilon/2$ ((x_n) βασική)
- $\exists n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_2$ $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2$ ($x_{k_n} \to x$)

Παίρνουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Έστω $n \geq n_0$
(i) $k_n \geq n \geq n_0 \geq n_1$, δηλ. $k_n, n \geq n_1$ άρα $d(x_{k_n}, x_n) < \varepsilon/2$
(ii) $n \geq n_0 \geq n_2 \Rightarrow d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2$
Άρα, $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Άρα $x_n \to x$.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass δεν ισχύει σε όλους τους μετρικούς χώρους:
"σε κάποιους μ.χ. υπάρχουν κάποιες φραγμένες ακολουθίες, που δεν έχουν καμία συγκλίνουσα υπακολουθία"

→ Έστω X απειροσύνολο και δ η διακριτή μετρική στο X.
Ο (X,δ) είναι φραγμένος: $diam(X) = 1 < \infty$.
Έστω (x_n) ακολουθία στο X με όρους διαφορετικούς ανά 2

- Η (x_n) είναι φραγμένη
- Αν $\exists (x_{k_n})$ συγκλίνουσα, τότε αυτή είναι τελικά σταθερή, άτοπο