

Πραγματική Ανάλυση (2015-16)

Ασκήσεις - Κεφάλαιο 2

Ομάδα Α'

1. Έστω $(X_1, d_1), \dots, (X_k, d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια μετρικών χώρων. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρικές γινόμενο στο $X = \prod_{i=1}^k X_i$:

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{d_i(x(i), y(i)) : i = 1, 2, \dots, k\}$$

και

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i), y(i))]^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

όπου $x = (x(1), \dots, x(k)), y = (y(1), \dots, y(k))$.

2. Έστω (x_n) και (y_n) βασικές ακολουθίες στο μετρικό χώρο (X, ρ) . Δείξτε ότι η $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο \mathbb{R} .

3. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) . Θεωρούμε την ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων του X με

$$E_n = \{x_k : k \geq n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

και την ακολουθία

$$t_n = \sup\{d(x_k, x_n) : k \geq n\} \in [0, +\infty], \quad n = 1, 2, \dots$$

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) Η (x_n) είναι βασική.
- (β) $\text{diam}(E_n) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.
- (γ) $t_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

4. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) και έστω $x \in X$. Δείξτε ότι:

- (α) Αν η (x_n) συγκλίνει στο x τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x .
- (β) Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x , τότε η (x_n) συγκλίνει στο x .

5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον $X \times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο d . Δείξτε ότι η $\rho : (X \times X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ είναι συνεχής.

6. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) . Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in X$ ισχύει το εξής: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Είναι σωστό ότι $x_n \rightarrow x$;

Ομάδα Β'

7. Έστω $(X_n, d_n), n = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n, n = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε το

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots) : x(n) \in X_n \right\}.$$

Δηλαδή, ο X αποτελείται από όλες τις ακολουθίες οι οποίες στη n -οστή θέση έχουν στοιχείο του X_n . Ορίζουμε $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)).$$

Δείξτε ότι ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

8. Έστω $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Ορίζουμε $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Δείξτε ότι ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

9. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n \in \ell_p$ με

$$x_n = (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots).$$

Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_p = 0$. Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον ℓ_{∞} ;

10. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) . Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \dots, x_n, x, \dots)$ συγκλίνει.

11. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) . Υποθέτουμε ότι $x_n \rightarrow x \in X$. Δείξτε ότι: για κάθε μετάθεση (1-1 και επί συνάρτηση) $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ η ακολουθία $y_n = x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x .

12. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$. Θέτουμε

$$A = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Δείξτε ότι: αν $x_n \rightarrow x \in X$ τότε για κάθε 1-1 συνάρτηση $f : A \rightarrow A$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow x$.

13. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) . Λέμε ότι η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < +\infty.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (α) Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση τότε είναι βασική (άρα, και φραγμένη). Ισχύει το αντίστροφο;
- (β) Αν η (x_n) είναι βασική τότε έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.
- (γ) Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνον αν έχει φραγμένη κύμανση.

14. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) . Δείξτε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα $\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.