

Πραγματική Ανάλυση (2015-16)
Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων – Ασκήσεις

Ομάδα Α'

1. Έστω $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $t \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $[0, 1]$. Ποιά είναι η f ;

2. Έστω $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο \mathbb{R} . Ποιά είναι η f ;

3. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < t \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right), & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f συνεχή στο \mathbb{R} . Ισχύει ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} ;

4. Έστω $f_n(t) = n^p t(1-t^2)^n$, $t \in [0, 1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f στο $[0, 1]$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$;

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

6. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Δείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt)$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

7. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$. Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A, \infty)$ ή $(-\infty, -A]$, όπου $A > 0$.

8. Έστω $\alpha > 1/2$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

9. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

10. (α) Έστω X σύνολο, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο X . Αποδείξτε ότι $|f_n| \rightarrow |f|$ ομοιόμορφα στο X .

(β) Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ για $n = 1, 2, \dots$. Αποδείξτε ότι η $(|f_n|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ ενώ η (f_n) δεν συγκλίνει.

11. Έστω X σύνολο, $f_n, g_n, f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο X . Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα στο X .

12. Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο \mathbb{R} , οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

13. Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f : X \rightarrow Y$ ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο X . Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

14. Έστω $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο X και κάθε f_n είναι φραγμένη στο X , τότε η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο X .

15. Έστω $f, f_n : (X, \rho) \rightarrow [a, b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο X . Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$ ομοιόμορφα στο X .

16. Έστω $\delta > 0$ και $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \geq \delta$ για κάθε $x \in X$ και $n = 1, 2, \dots$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο X , δείξτε ότι:

(α) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$.

(β) $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο X .

Ομάδα Β'

17. Έστω $f_n(t) = \frac{t}{1+nt^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει f ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι $f'_n(t) \rightarrow f'(t)$ αν $t \neq 0$, αλλά $f'_n(0) \not\rightarrow f'(0)$. Για ποιά διαστήματα $[a, b]$ ισχύει ότι $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$;

18. Έστω $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} και $f'_n \rightarrow 0$ κατά σημείο στο \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα το οποίο περιέχει το 0 η f'_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε κλειστό διάστημα το οποίο δεν περιέχει το 0 η f'_n συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.

19. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$$

συγκλίνει κατά σημείο, και βρείτε την οριακή συνάρτηση.

20. Έστω $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση f . Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

21. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 f(t) dt.$$

Ισχύει πάντα το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

22. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^{nx}.$$

Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f . Βρείτε το όριο των ολοκληρωμάτων

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

Είναι η σύγκλιση της (f_n) στην f ομοιόμορφη;

23. Ορίζουμε $f_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ θέτοντας $f_1(x) = \sin x$ και

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

24. Δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, 1]$. Αντιθέτως, δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

25. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-A, A]$, $A > 0$.

26. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-A, A]$, $A > 0$, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x .

27. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2} \right)$$

συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, 1]$.

28. Ορίζουμε $I(x) = 0$ αν $x \leq 0$ και $I(x) = 1$ αν $x > 0$. Έστω (x_k) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων σε κάποιο διάστημα (a, b) και έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ απολύτως συγκλίνουσα σειρά. Δείξτε ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a, b) και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, b) \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

29. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$, $f, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο A . Έστω t_0 σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = x_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

α. Η (x_n) συγκλίνει στο \mathbb{R} και

β. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t).$$

30. Έστω $f_n(t) = t^n$ στο $[0, 1]$ και $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η (gf_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

31. Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X . Ορίζουμε την ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ με

$$f_n(x) = \text{dist}(x, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}), \quad x \in X.$$

Δείξτε ότι:

(α) Η (f_n) είναι φθίνουσα και $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο.

(β) $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στον X αν και μόνον αν ο X είναι ολικά φραγμένος.

32. (α) Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι με τον X συμπαγή. Αν $f_n : X \rightarrow Y$ για $n = 1, 2, \dots$ και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \rightarrow x$ ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$, αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

(β) Αποδείξτε ότι η συμπαγεία είναι απαραίτητη, θεωρώντας την ακολουθία $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

και την $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$. Διαπιστώστε ότι ικανοποιείται η υπόθεση, αλλά $f_n \not\rightarrow f$ ομοιόμορφα.

33. Αν $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, δείξτε ότι η ακολουθία (h_n) όπου $h_n = f_n \circ g_n$ (δηλ. $h_n(t) = f_n(g_n(t))$) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h = f \circ g$.

34. Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n \geq f_{n+1} \geq \dots \geq 0$ και $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Για κάθε $a \in [0, 1]$ η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

(ii) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

35. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, δείξτε ότι η f έχει ρίζα.

36. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$f_n(x) = x^n \quad \text{και} \quad g_n(x) = x^n(1-x).$$

(β) Εξετάστε για ποιά $x \geq 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Για ποιές τιμές του $a > 0$ είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, a]$;

37. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, \infty)$, $a > 0$.

38. Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Δείξτε ότι:

(i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f ;

(ii) Για κάθε $a > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

39. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και έστω (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \rightarrow 0$. Θετούμε $f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

40. (α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

41. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του X . Ορίζουμε $f_n(x) = \text{dist}(x, K_n)$. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα. Ποιά είναι η f ;