

**Πραγματική Ανάλυση (2015–16)**  
**Πλήρεις μετρικοί χώροι – Ασκήσεις**

**Ομάδα Α'**

1. Στο σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών θεωρούμε τις μετρικές  $d(m, n) = |m - n|$  και  $\rho(m, n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ .

(α) Δείξτε ότι ο  $(\mathbb{N}, d)$  είναι πλήρης αλλά ο  $(\mathbb{N}, \rho)$  δεν είναι πλήρης.

(β) Δείξτε ότι κάθε μονοσύνολο  $\{n\}$  είναι  $d$ -ανοικτό και  $\rho$ -ανοικτό.

(γ) Δείξτε ότι οι μετρικές  $\rho$  και  $d$  είναι ισοδύναμες (άρα, οι  $(\mathbb{N}, d)$  και  $(\mathbb{N}, \rho)$  είναι ομοιομορφικοί).

2. Θεωρούμε το  $\mathbb{R}$  με μετρική την  $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ . Δείξτε ότι η  $d$  είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του  $\mathbb{R}$  αλλά ο  $(\mathbb{R}, d)$  δεν είναι πλήρης.

3. Θεωρούμε δύο μετρικές  $d_1$  και  $d_2$  στο ίδιο σύνολο  $X$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν  $a, b > 0$  ώστε: για κάθε  $x, y \in X$ ,

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y).$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία  $(x_n)$  στον  $X$  είναι βασική στον  $(X, d_1)$  αν και μόνο αν είναι βασική στον  $(X, d_2)$ .

4. Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $D$  πυκνό υποσύνολο του  $X$ . Δείξτε ότι: αν κάθε βασική ακολουθία  $(x_n)$  στοιχείων του  $D$  συγκλίνει σε κάποιο  $x \in X$ , τότε ο  $X$  είναι πλήρης.

5. Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος  $(X, \rho)$  είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε κλειστή μπάλα

$$\hat{B}(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(z, x) \leq \varepsilon\},$$

όπου  $x \in X$  και  $\varepsilon > 0$ , είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του  $X$ .

6. Έστω  $(X, \rho)$  πλήρης μετρικός χώρος και  $D$  πυκνό υποσύνολο του  $X$  ώστε το  $X \setminus D$  να είναι επίσης πυκνό. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα  $D, X \setminus D$  δεν είναι σύνολο  $F_\sigma$ .

7. Δείξτε ότι: αν  $(L_n)$  είναι ακολουθία ευθειών στο  $\mathbb{R}^2$  τότε  $\text{int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n) = \emptyset$ .

**Ομάδα Β'**

8. (α) Δείξτε ότι ο  $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ ,  $1 \leq p < \infty$  είναι πλήρης.

(β) Δείξτε ότι ο κύβος του Hilbert  $\mathcal{H}^\infty$  είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(γ) Δείξτε ότι ο  $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$  δεν είναι πλήρης.

9. Θεωρούμε τον  $\mathcal{C}([0, 1])$  με μετρική την

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Δείξτε ότι η  $(f_n)_{n \geq 2}$  με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

είναι ακολουθία Cauchy ως προς την  $\rho_1$  αλλά δεν είναι συγκλίνουσα.

10. Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο  $X$  είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε αριθμησιμο, κλειστό υποσύνολο του  $X$  είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

11. Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο  $(X, \rho)$  είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε ακολουθία φραγμένης κύμανσης στον  $X$  είναι συγκλίνουσα.

**12.** Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος,  $(x_n)$  ακολουθία στον  $X$  και  $x \in X$  ώστε  $x_n \rightarrow x$ . Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{x_n : n = 1, 2, \dots\} \cup \{x\}$ . Αποδείξτε ότι ο  $(A, \rho|_A)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος.

**13.** Έστω  $\rho$  μετρική στο  $\mathbb{R}$  ώστε: (i) ο  $(\mathbb{R}, \rho)$  είναι πλήρης και (ii) η  $\rho$  είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική. Δείξτε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε  $\text{diam}_\rho([n, \infty)) \geq \delta$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**14.** Έστω  $X$  πλήρης χώρος με νόρμα και  $\hat{B}(x_n, r_n)$  φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες. Αποδείξτε ότι  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$ .

**15.** Έστω  $(X, \rho)$  πλήρης μετρικός χώρος και  $f : X \rightarrow Y$  συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν  $(E_n)$  είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του  $X$ , με  $\text{diam}(E_n) \rightarrow 0$ , τότε

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

**16.** Έστω  $(X, \rho)$  πλήρης μετρικός χώρος και  $G$  μη κενό ανοικτό υποσύνολο του  $X$ . Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\sigma(x, y) = \rho(x, y) + \left| \frac{1}{\text{dist}(x, X \setminus G)} - \frac{1}{\text{dist}(y, X \setminus G)} \right|$$

στο  $G \times G$ . Δείξτε ότι ο  $(G, \sigma)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος και ότι η  $\sigma$  είναι ισοδύναμη με την  $\rho|_G$ .

**17.** Έστω  $(G_n)$  ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι το  $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  είναι υπεραριθμήσιμο.

**18.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι ασυνεχής σε ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας αν και μόνο αν είναι συνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .

**19.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει μετρική  $d$  στο  $\mathbb{Q}$  ώστε η  $d$  να είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ο  $(\mathbb{Q}, d)$  να είναι πλήρης.

**20.** Έστω  $(X, \rho)$  πλήρης μετρικός χώρος και δυο συναρτήσεις  $f, g : X \rightarrow X$ . Αποδείξτε ότι:

(α) Αν υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$  ώστε η  $f^k = f \circ \dots \circ f$  να είναι συστολή, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο  $x \in X$  ώστε  $f(x) = x$ .

(β) Αν η  $f$  είναι συστολή και  $f \circ g = g \circ f$ , τότε υπάρχει μοναδικό  $x \in X$  ώστε  $f(x) = g(x) = x$ .

**21.** Έστω  $(X, d)$  πλήρης μετρικός χώρος,  $E$  πυκνό και  $G_\delta$ -υποσύνολο του  $X$ . Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό  $h : X \rightarrow X$  ισχύει  $E \cap h(E) \neq \emptyset$ .

### Ομάδα Β' - Συμπληρωματικές ασκήσεις

**22.** Έστω  $(X, d)$  πλήρης μετρικός χώρος και  $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$  συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει  $\emptyset \neq G \subseteq X$  ανοικτό ώστε η  $f|_G$  να είναι σταθερή.

**23.** Έστω  $(G_n)$  ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι το  $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  είναι υπεραριθμήσιμο.

**24.** Στο  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  θεωρούμε τη μετρική

$$d(x, y) = |x - y| + \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Δείξτε ότι η  $d$  είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ότι ο  $(X, d)$  είναι πλήρης.

**25.** Έστω  $d$  μετρική στο  $\mathbb{Q}$  η οποία είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι ο  $(\mathbb{Q}, d)$  δεν είναι πλήρης.

**26.** Σωστό ή λάθος; Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση, και αν

$$F_m = f^{-1}([-m, m]) = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq m\},$$

τότε τουλάχιστον ένα  $F_m$  περιέχει διάστημα.

**27.** Έστω  $(X, d)$ ,  $(Y, \sigma)$  μετρικοί χώροι και έστω  $f : X \rightarrow Y$  συνεχής συνάρτηση. Για κάθε  $y \in Y$  ορίζουμε

$$A_y = \{x \in X : f(x) = y\} = f^{-1}(\{y\}).$$

Δείξτε ότι:

- (α) Αν η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για κάθε  $y, y' \in f(X)$  με  $y \neq y'$ , ισχύει  $\text{dist}(A_y, A_{y'}) > 0$ .
- (β) Αν ο  $(X, d)$  είναι πλήρης και ο  $Y$  είναι αριθμήσιμος, υπάρχει  $y \in Y$  ώστε  $(A_y)^\circ \neq \emptyset$ .

**28.** Έστω  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και έστω  $d$  μετρική στο  $X$  ώστε ο  $(X, d)$  να είναι πλήρης. Δείξτε ότι ο  $(X, d)$  έχει μεμονωμένο σημείο.

**29.** Έστω  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ . Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής, επί και  $d(x, y) \leq \sigma(f(x), f(y))$  για κάθε  $x, y \in X$ . Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τις ακόλουθες προτάσεις:

- (i) Αν ο  $(X, d)$  είναι πλήρης τότε ο  $(Y, \sigma)$  είναι πλήρης.
- (ii) Αν ο  $(Y, \sigma)$  είναι πλήρης τότε ο  $(X, d)$  είναι πλήρης.

**30.** Έστω  $(X, d)$  πλήρης μετρικός χώρος και  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  για  $n = 1, 2, \dots$  συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι: είτε υπάρχει  $x_0 \in X$  ώστε  $f_n(x_0) \neq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ή υπάρχουν  $\emptyset \neq G \subseteq X$  ανοικτό και  $k \in \mathbb{N}$  ώστε  $f_k(x) = 0$  για κάθε  $x \in G$ .

**31.** Έστω  $\mathbb{N}$  το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θεωρούμε την  $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$d(m, n) = 1 + \frac{1}{m+n}$$

αν  $m \neq n$  και  $d(m, n) = 0$  αν  $m = n$ .

- (α) Δείξτε ότι η  $d$  είναι μετρική.
- (β) Δείξτε ότι ο  $(\mathbb{N}, d)$  είναι πλήρης.
- (γ) Δείξτε ότι: στον  $(\mathbb{N}, d)$  υπάρχει φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες που η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

### Ομάδα Γ'

**32.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

**33.** (α) Έστω  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  αριθμήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η συνάρτηση  $F_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$F_A(x) = \sum_{\{n: a_n \leq x\}} 2^{-n}$$

είναι αύξουσα, συνεχής από δεξιά παντού και ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του  $A$ .

(β) Έστω  $A$  αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας  $D(g)$  της  $g$  να είναι το  $\mathbb{R} \setminus A$ .

(γ) Έστω  $E$  κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Θέτουμε  $G = E^\circ \cap \mathbb{Q}$  και ορίζουμε τη συνάρτηση  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = \chi_E(x) - \chi_G(x)$ . Αποδείξτε ότι  $D(h) = E$ .

(δ) Έστω  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  ένα  $F_{\sigma}$ -υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Ορίζουμε  $f_E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{n:x \in E_n\}}, & x \in \mathbb{Q} \cap E \\ -\frac{1}{\min\{n:x \in E_n\}}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap E \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι  $D(f_E) = E$ .

**34.** Έστω  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα  $(a, b) \subseteq [0, \infty)$  με την εξής ιδιότητα: για κάθε  $y \in (a, b)$  ισχύει  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(ny) = 0$ . Αποδείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**35.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $n_x \in \mathbb{N}$  ώστε, για κάθε  $n \geq n_x$ ,  $f^{(n)}(x) = 0$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι πολυώνυμο.