Άσκηση

α) Έστω (X,d) μ.χ. και $A \subseteq X$ με την ιδιότητα να υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(x,y) \geq \delta$ $\forall x,y \in A$ με $x \neq y$.
Να δ.ό. A κλειστό

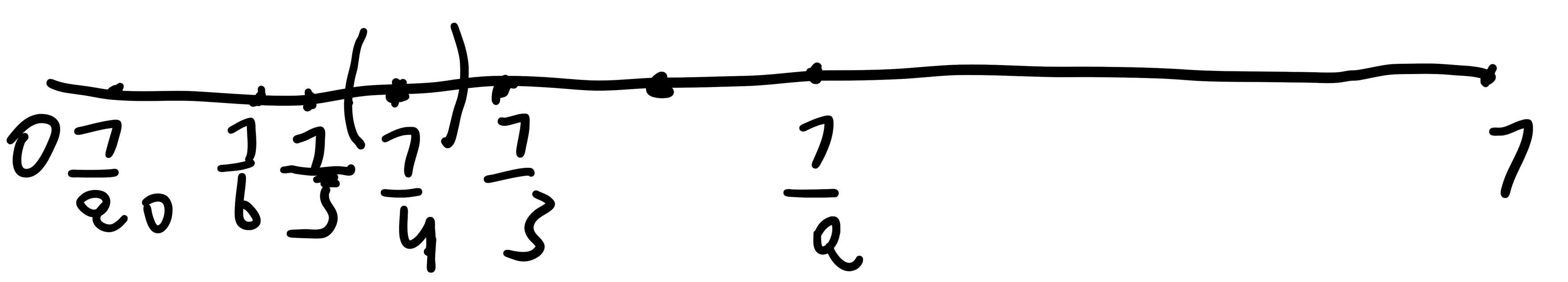
Λύση

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x \in X$.
Θα δείξουμε ότι $x \in A$ και θα έχουμε τελειώσει
Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα, τότε είναι και βασική.
Άρα για το $\delta > 0$ της υπόθεσης υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x_m) < \delta$.
Συνεπώς, αν $n \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_{n_0}) < \delta$
Επομένως, αφού $x_n, x_{n_0} \in A$, πρέπει να ισχύει ότι $x_n = x_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$
Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή. Οπότε $x_n \to x_{n_0}$.
Από μοναδικότητα ορίου, $x = x_{n_0} \in A$

β) Εξετάστε αν υπάρχει $B \subseteq \mathbb{R}$ ώστε ~~του~~ όλα τα τα σημεία να είναι μεμονωμένα αλλά να μην είναι κλειστό.

Λύση

Υπάρχει τέτοιο σύνολο, το $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$



Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\varepsilon = \min\{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\} =$

$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$

Θ.δ.ό $B(\frac{1}{n}, \varepsilon) \cap B = \{\frac{1}{n}\}$

Πράγματι, έστω $m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Τότε $\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \underset{m \leq n-1}{\geq} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \geq \varepsilon & , \text{αν } m < n \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \underset{m \geq n+1}{\geq} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon & , \text{αν } m > n \end{cases}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση $\frac{1}{m} \notin B(\frac{1}{n}, \varepsilon)$.
Συνεπώς $B(\frac{1}{n}, \varepsilon) \cap B = \{\frac{1}{n}\}$. Άρα το $\frac{1}{n}$ είναι μεμονωμένο σημείο του B.

<u>Δεν</u> είναι όμως κλειστό του B, διότι η $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολ. στο B, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ και $0 \notin B$

Άσκηση

Έστω (X, d) μ.χ. και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στο X

i) Ν.δ.ό το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

Λύση

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ $\forall m,n\geq n_0$

Τότε $d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Ισχυρισμός: $A\subseteq B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)\cup\ldots\cup B(x_{n_0},\varepsilon)$

Πράγματι, έστω $x_n\in A$. Αν $n\geq n_0$, τότε $d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon$

Άρα $x_n\in B(x_{n_0},\varepsilon)$

Αν $n<n_0$, τότε $x_n\in B(x_n,\varepsilon)$

Οπότε σε κάθε περίπτωση $x_n\in\bigcup_{i=1}^{n_0}B(x_i,\varepsilon)$

ii) Υποθέτουμε ότι $x_n\to x$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συμπάγειας ν.δ.ό. το $B=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ είναι συμπαγές.

Λύση

Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του B

Τότε $B\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$. Αφού $x\in B$, τότε υπάρχει $i_0\in I$ ώστε $x\in U_{i_0}$. Το U_{i_0} είναι ανοικτό. Άρα υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $B(x,\varepsilon)\subseteq U_{i_0}$.

Όμως $x_n\to x$. Άρα υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $d(x_n,x)<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Συνεπώς $x_n\in B(x,\varepsilon)$ $\forall n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in U_{i_0}$ $\forall n\geq n_0$.

Τώρα $x_1, \dots, x_{n_0-1} \in B \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Συνεπώς $\forall\, 1 \le k \le n_0-1$,
υπάρχει $i_k \in I$ ώστε $x_k \in V_{i_k}$

<u>Ισχυρισμός</u>: $B \subseteq V_{i_0} \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_{n_0-1}}$

Πράγματι, αν $y \in B$, τότε $y = x$ ή $y = x_n$.

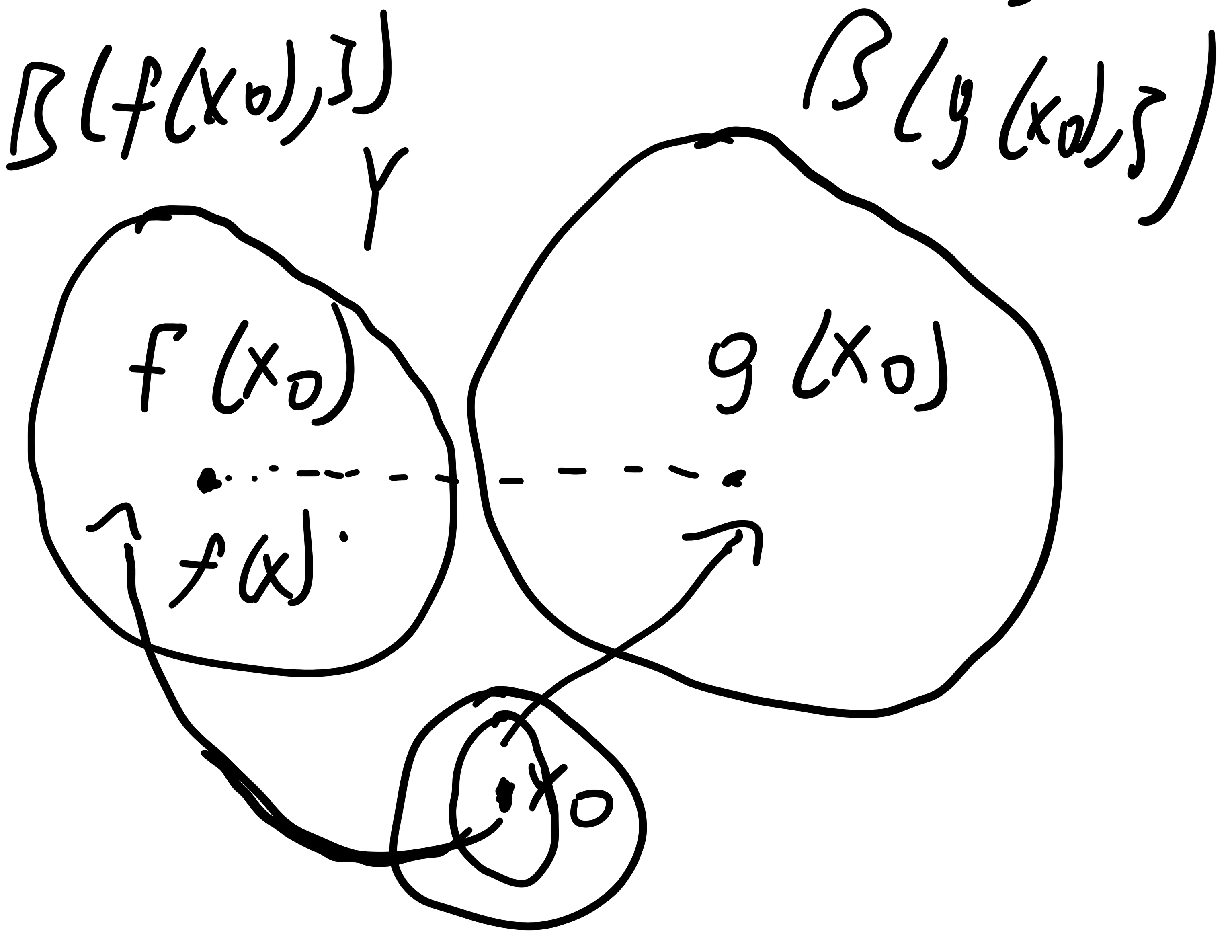
- Αν $y = x$, ή $y = x_n$ για κάποιο $n \geq n_0$, τότε έχουμε δείξει ότι $y \in V_{i_0}$
- Αν $y = x_n$ για κάποιο $1 \le n \le n_0 - 1$, τότε $x_n \in V_{i_n}$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $y \in \bigcup_{k=0}^{n_0-1} V_{i_k}$

Οπότε B συμπαγές

<u>Άσκηση</u>

Έστω (X,d), (Y,ρ) μ.χ. και $f, g : X \to Y$ συνεχείς. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$.
Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in B(x_0, \delta)$, τότε $f(x) \neq g(x)$



<u>Λύση</u>

Αφού $f(x_0) \neq g(x_0)$, τότε θέτω $\varepsilon = \rho(f(x_0), g(x_0)) > 0$.

Από συνέχεια της f στο x_0 υπάρχει $\delta_1>0$, ώστε αν $d(x,x_0)<\delta_1$, τότε $\rho(f(x),f(x_0))<\frac{\varepsilon}{2}$

Από συνέχεια της g στο x_0, υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε αν $d(x,x_0)<\delta_2$, τότε $\rho(g(x),g(x_0))<\frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε λοιπόν $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$.

Έστω $x\in B(x_0,\delta) \Rightarrow d(x,x_0)<\delta\le\delta_1,\delta_2$

Οπότε $\rho(f(x),f(x_0))<\frac{\varepsilon}{2}$ και $\rho(g(x),g(x_0))<\frac{\varepsilon}{2}$.

Τώρα $\varepsilon=\rho(f(x_0),g(x_0))\le\rho(f(x_0),f(x))+$

$$+\rho(f(x),g(x))+\rho(g(x),g(x_0))<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\rho(f(x),g(x))+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon+\rho(f(x),g(x))$$

$$\Rightarrow \varepsilon<\varepsilon+\rho(f(x),g(x)) \Leftrightarrow \rho(f(x),g(x))>0$$

Άρα $f(x)\neq g(x)$ και αυτό $\forall x\in B(x_0,\delta)$

Άσκηση

Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X ακολουθία που δεν συγκλίνει.
Να δειχθεί ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει τουλάχιστον δύο διακεκριμένα υπακολουθιακά όρια.

Λύση

~~Ε~~ Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. σε συμπαγή χώρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ με $x\in X$ ώστε $x_{n_k}\to x$.

Άρα το x είναι ένα υπακολουθιακό όριο. Θα δείξουμε ότι δεν είναι μοναδικό.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $\varepsilon>0$ ~~κα~~ και υπακολουθία $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $d(x_{m_k},x)\geq\varepsilon$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Πράγματι, αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα, ~~υπάρχει~~ τότε $x_n\not\to x$.

Οπότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$ ~~υπα~~ να υπάρχει $N\geq n$ ώστε $d(x_N,x)\geq\varepsilon$

- Για $n=1$, υπάρχει λοιπόν $m_1\geq 1$ ώστε $d(x_{m_1},x)\geq\varepsilon$
- Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε βρει $m_1<\dots<m_k$ ώστε $d(x_{m_i},x)\geq\varepsilon$ $\forall 1\leq i\leq k$

Τότε για $n=m_k+1$, υπάρχει $m_{k+1}\geq m_k+1>m_k$ ώστε $d(x_{m_{k+1}},x)\geq\varepsilon$

Οπότε επαγωγικά ορίζεται υπακολουθία $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $d(x_{m_k},x)\geq\varepsilon$ $\forall k\in\mathbb{N}$

Τώρα η $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στον συμπαγής (X,d). Άρα υπάρχει $y\in X$ και υπακολ. $(x_{m_{k_\lambda}})_{\lambda\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_{m_{k_\lambda}} \to y$.

Όμως $d(x_{m_{k_\lambda}}, x) \geq \varepsilon$ $\forall \lambda\in\mathbb{N}$. Άρα $x\neq y$, αφού $x_{m_{k_\lambda}} \not\to x$.

Όμως η $(x_{m_{k_\lambda}})_{\lambda\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα και το y είναι υπακολουθιακό όριο της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Συνεπώς βρήκαμε δύο υπακολουθιακά όρια x, y.

<u>Παρατήρηση</u>

Για $(X,d) = (|\cdot|, (0,1])$ και ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{αν } n=2k \\ \frac{1}{n}, & \text{αν } n=2k-1 \end{cases}$$

Τότε το μοναδικό υπακολουθιακό όριο της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι το $\frac{1}{2}$. Όμως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>δε</u> συγκλίνει. (Το πρόβλημα είναι ότι ο (X,d) δεν είναι συμπαγής)

Άσκηση

Έστω X σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων με $f_n \to f$ κ.σ., όπου $f : X \to \mathbb{R}$

α) Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε ν.δ.ό. και η f είναι φραγμένη.

Λύση

Για $\varepsilon = 1$, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < 1 \quad \forall\, n \geq n_0$.

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$$

Έστω $x \in X$. Τότε $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)|$

$$\leq \|f_{n_0} - f\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty < 1 + \|f_{n_0}\|_\infty$$

Επομένως $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \leq 1 + \|f_{n_0}\|_\infty < +\infty$

Άρα f φραγμένη

β) Δείξτε με ένα παράδειγμα, ότι αν η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, τότε η f δεν είναι απαραίτητα φραγμένη.

Λύση

Θεωρούμε $X = (0, 1)$

Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$

Τότε αν $n \in \mathbb{N}$ και $x \in (0,1)$, έχουμε ότι $|f_n(x)| =$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right| = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Οπότε $\|f_n\|_\infty \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή f_n φραγμένη.

Όμως $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

Άρα δείξαμε ότι $f_n \to f$ κ.σ, όπου $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\forall x \in (0,1)$

Όμως $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$. Άρα η f δεν είναι φραγμένη

Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε από a) η f θα είναι φραγμένη → άτοπο.

Άρα εδώ η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη

Άσκηση

Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$

a) Αποδείξτε ότι $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f και βρείτε την f.

Λύση

Για $x=0$: $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Για $x>0$: $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1} = \dfrac{x}{x+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

Επομένως $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$, όπου $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x=0 \\ 1, & \text{αν } x>0 \end{cases}$

β) Ν.δ.ό $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ $\forall a>0$ και ότι $f_n \not\to f$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$ $\forall a>0$

Λύση

Έστω $a>0$. Τότε αν $x \geq a$, $|f_n(x) - f(x)| =$
$$= \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{nx}$$

Συνεπώς $\sup\limits_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a,+\infty)} \dfrac{1}{nx} = \dfrac{1}{na}$

$\Leftrightarrow \sup\limits_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{na} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$

Στο $[0,a]$ έχουμε ότι $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$ $\forall x\in[0,a]$

και $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x=0 \\ 1, & \text{αν } x\in(0,a] \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι f_n συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$ και η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Οπότε $f_n \not\to f$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$, γιατί αν είχαμε ομοιόμορφη σύγκλιση, τότε η f θα ήταν συνεχής $\longrightarrow$ άτοπο

$$\left(\overbrace{\sup_{x\in(0,a)} |f_n(x) - f(x)|}^{\text{Β τρόπος}} = \sup_{x\in(0,a)} \frac{1}{nx} = +\infty \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \right)$$

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ.

Ν.δ.ό ο X δεν είναι ολικά φραγμένος $\Longleftrightarrow$ υπάρχει $\delta>0$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X ώστε $d(x_n,x_m)\geq\delta$ $\forall m\neq n$

Λύση

($\Longrightarrow$) Έστω ότι ο X δεν είναι ολικά φραγμένος. Τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\forall y_1,\dots,y_n\in X$ να ισχύει ότι $\bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,\delta)\subsetneq X$

Έστω $x_1\in X$. Αφού $B(x_1,\delta)\subsetneq X$, τότε υπάρχει $x_2\in X\setminus B(x_1,\delta)$, δηλαδή $d(x_1,x_2)\geq\delta$

Έστω για την επαγωγική υπόθεση ότι έχουμε βρει $x_1,\dots,x_n\in X$ ώστε $d(x_i,x_j)\geq\delta$ $\forall 1\leq i\neq j\leq n$

Όμως $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\delta)\subsetneq X$. Άρα υπάρχει $x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\delta)$, δηλαδή $x_{n+1}\notin B(x_i,\delta)$ $\forall 1\leq i\leq n$. Συνεπώς $d(x_{n+1},x_i)\geq\delta$ $\forall 1\leq i\leq n$

Επομένως επαγωγικά ορίζουμε τη ζητούμενη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι υπάρχει $\delta>0$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $d(x_m,x_n)\geq\delta$ $\forall m,n\in\mathbb{N}$ με $m\neq n$.

Έστω ότι (X,d) ολικά φραγμένος. Τότε για το $\frac{\delta}{2}$ υπάρχουν $y_1,\dots,y_k\in X$ ώστε $X=B(y_1,\frac{\delta}{2})\cup\dots\cup B(y_k,\frac{\delta}{2})$

Όμως τα $x_n, n\in\mathbb{N}$ είναι άπειρα το πλήθος ~~και~~, αφού είναι ανά δύο διακεκριμένα διότι $d(x_m,x_n)\geq\delta$ $\forall m\neq n$.

Οι μπάλες $B(y_i,\frac{\delta}{2})$ είναι πεπερασμένες και η ένωσή τους καλύπτει τον X.

Άρα υπάρχουν $m,n\in\mathbb{N}$ με $m\neq n$ ώστε $x_m,x_n\in B(y_i,\frac{\delta}{2})$ για κάποιο $1\leq i\leq k$

Τότε $d(x_m,x_n)\leq d(x_m,y_i)+d(y_i,x_n)<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$ που είναι άτοπο

Άρα ο (X,d) <u>δεν</u> είναι ολικά φραγμένος

<u>Άσκηση</u>

Έστω (X,d) μ.χ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X.
Θέτουμε $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

i) Αν το x είναι σ.σ του A, τότε υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_n}\to x$

Λύση

Αφού το x είναι σ.σ του A, τότε $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε ότι το $B(x,\varepsilon) \cap A$ άπειρο σύνολο.

Θα την ορίσουμε επαγωγικά:

- Για $\varepsilon = 1 > 0$, το $B(x,1) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο. Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_{n_1}, x) < 1$
- Για την επαγωγική υπόθεση, έστω ότι έχουμε βρει $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ώστε $d(x_{n_i}, x) < \frac{1}{i}$ $\forall 1 \le i \le k$

Τώρα $\overset{\text{για } \varepsilon = \frac{1}{k+1} > 0}{\text{το}}$ $B(x, \frac{1}{k+1}) \cap A = B(x, \frac{1}{k+1}) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο σύνολο. Συνεπώς υπάρχει $n_{k+1} > n_k$, ώστε ~~$d(x$~~ $x_{n_{k+1}} \in B(x, \frac{1}{k+1})$, δηλαδή $d(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$

Άρα επαγωγικά ορίζουμε υπακολουθία $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k} \overset{k \to \infty}{\Longrightarrow} d(x_{n_k}, x) \to 0$ $\Longleftrightarrow x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$

ii) Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική $\overset{\text{αλλά δε συγκλίνει}}{}$ τότε το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό.

Λύση

Ισχύει ότι $\bar{A} = A \cup A'$

Έστω ότι το A δεν είναι κλειστό. Τότε

υπάρχει $x \in \bar{A} \setminus A$. Τότε $x \in A'$. Άρα από i)
υπάρχει $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ~~υποσ~~ υπακολ. της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
ώστε $x_{n_k} \to x$
Όμως $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα είναι συγκλίνουσα (στο x).
Αυτό είναι άτοπο από υπόθεση.
Άρα $\bar{A} = A$ και A κλειστό επομένως

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ
Τότε ο (X,d) είναι πλήρης $\iff$ κάθε αριθμήσιμο, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος

Λύση

($\Rightarrow$) Έστω (X,d) πλήρης και $F \subseteq X$ αριθμήσιμο, φραγμένο και κλειστό.
Αφού F κλειστό και (X,d) πλήρης, τότε και το F είναι πλήρες.

($\Leftarrow$) Έστω ότι (X,d) δεν είναι πλήρης.
Τότε υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική που δε συγκλίνει.
Ορίζουμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ που είναι αριθμήσιμο.
Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική που δε συγκλίνει,

τότε από το ii) της προηγούμενης Άσκησης έχουμε ότι A είναι και κλειστό.

<u>Ισχυρισμός</u>: Το A είναι φραγμένο.

<u>Πράγματι</u>, αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική για $\varepsilon=1>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $d(x_m,x_n)<1$ $\forall m,n\geq n_0$

Θέτουμε $M=\max\{1, d(x_i,x_j) : 1\leq i,j\leq n_0\}$

Θα δείξουμε ότι $d(x_m,x_n)\leq 2M$ $\forall m,n\in\mathbb{N}$.

i) <u>Αν $m,n\geq n_0$</u>: Τότε $d(x_m,x_n)<1\leq M<2M$

ii) <u>Αν $m<n_0$</u>: Τότε $d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x_{n_0})+d(x_{n_0},x_n)$
$\leq M+M=2M$

Άρα $diam(A)=\sup\{d(x_m,x_n) : m,n\in\mathbb{N}\}\leq 2M<+\infty$

Άρα το A είναι και φραγμένο.

Οπότε από υπόθεση, το A είναι πλήρες. και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στο A. Άρα υπάρχει $x\in A$ ώστε $x_n\to x$ — άτοπο αφού υποθέσαμε ότι δεν είναι συγκλίνουσα

Άρα (X,d) πλήρης

<u>Άσκηση</u>

Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,\beta]$ $\forall a,\beta \in \mathbb{R}$ με $a<\beta$

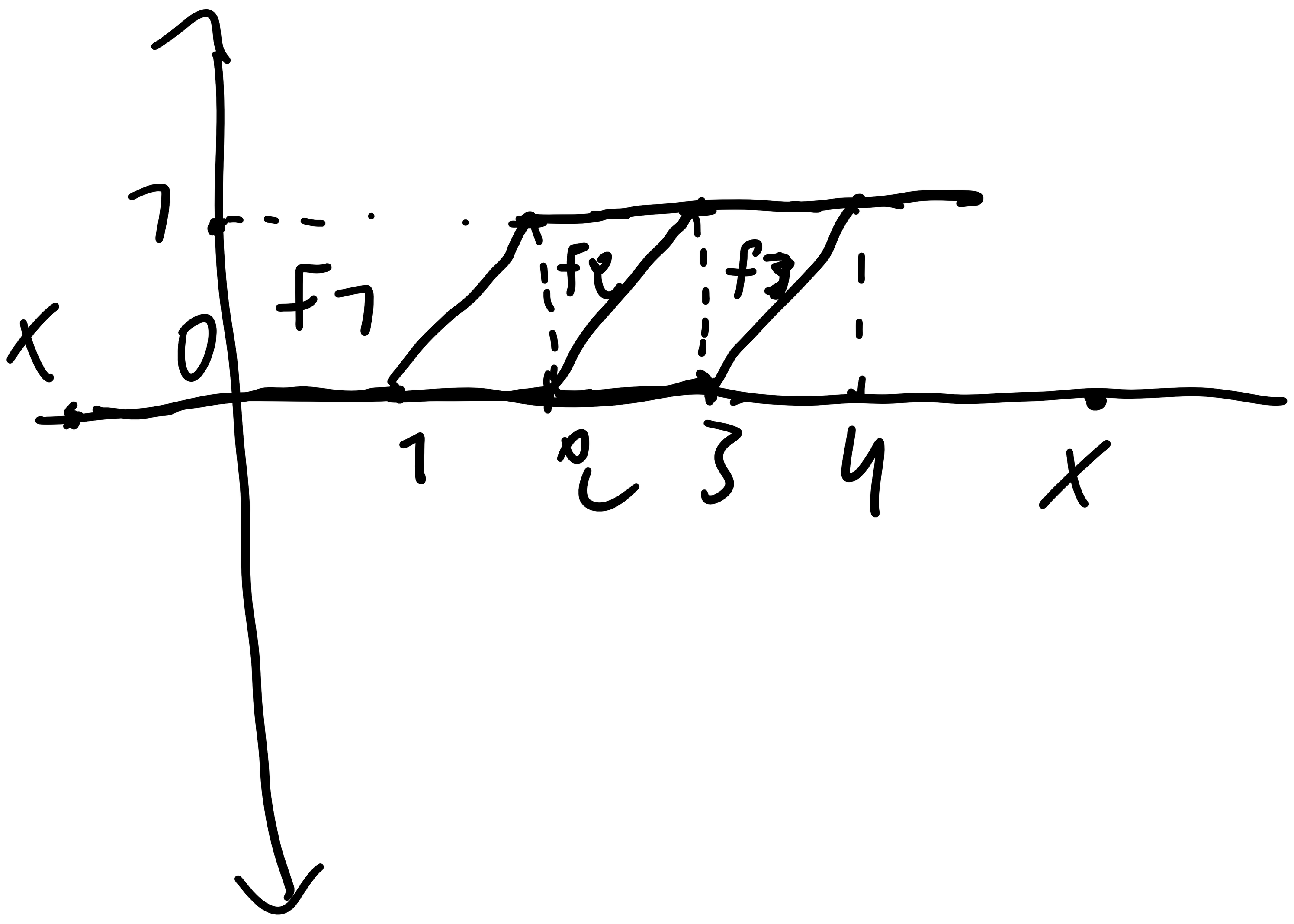
α) Ν.δ.ό η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Έστω $x\in\mathbb{R}$. Τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[x-1,x+1]$ και f_n συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$. Επομένως η f συνεχής στο $(x-1,x+1)$ ως ομοιόμορφο όριο συνεχών. Επομένως, αφού $x\in(x-1,x+1)$ τότε f συνεχής στο x. Άρα f συνεχής.

β) Ισχύει αναγκαία ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

<u>Λύση</u>



Δεν ισχύει αναγκαία.

Θεωρώ $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,n]\\ x-n, & x\in[n,n+1]\\ 1, & x\in[n+1,+\infty)\end{cases}$$

Τότε f_n συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$

Έστω $x\in\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $n_0\geq x$. Συνεπώς $\forall n\geq n_0$, έχουμε ότι $n\geq x \Rightarrow f_n(x)=0$ $\forall n\geq n_0$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$

Συνεπώς δείξαμε ότι $f_n \to f$ κ.σ., όπου $f=0$

• Έστω τώρα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $n_0>\beta$

Οπότε $\forall n\geq n_0$ $\displaystyle\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f_n(x)| = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} 0 = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]$

• $f_n \not\to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$: Πράγματι, αν $n\in\mathbb{N}$, τότε $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1\neq 0$

Άρα $f_n \not\to f$ ομοιόμορφα.