Άσκηση

Εξετάστε αν η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{1+n^3x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$

Λύση

Θέτουμε $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^3x^2}$, $x \geq 0$

$$f_n'(x) = \frac{2(1+n^3x^2) - 2n^3x \cdot 2x}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{2-2n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2} =$$

$$= 2n^3\left(\frac{1}{n^3} - x^2\right) / (1+n^3x^2)^2$$

x	0		$\frac{1}{n^{3/2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Οπότε $\max\limits_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{\frac{2}{n^{3/2}}}{2} = \frac{1}{n^{3/2}}$

Άρα $\forall x \geq 0$ $f_n(x) \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ και έχουμε ότι

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$ διότι $\frac{3}{2} > 1$

Άρα από κριτήριο Weistruss η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{1+n^3x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$

Άσκηση

α) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ συνεχής και επί.

Αν $D\subseteq X$ πυκνό, τότε ν.δ.ο. $f(D)\subseteq Y$ πυκνό.

Λύση

Έστω $y\in Y$. Αφού f επί, υπάρχει $x\in X$ ώστε $f(x)=y$. Όμως D πυκνό στον X. Άρα υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D με $x_n \xrightarrow{d} x \overset{f\ \text{συν}}{\Longrightarrow} f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)=y$ και $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ στο $f(D)$.

Οπότε $\overline{f(D)}=Y$

β) Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $f: X \to X$ ομοιομορφισμός.

Αν $E \subseteq X$ G_δ και πυκνό, να δείξετε ότι $E \cap f(E) \neq \emptyset$

<u>Λύση</u>

Αφού E G_δ, τότε $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$, όπου U_n ανοικτό $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης αφού E πυκνό και $E \subseteq U_n \Rightarrow$
$\Rightarrow U_n$ πυκνό $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τώρα $f(E) = f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n\right) \overset{f \text{ ομοιομορφισμός}}{=} \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(U_n)$ και $f(U_n)$ ανοικτό $\forall n \in \mathbb{N}$, εφόσον f ομοιομορφισμός

Όμως U_n πυκνό υπσ/ν και f συνεχής και επί ως ομοιομορφισμός. Άρα από α) $\Rightarrow f(U_n)$ πυκνό υπσ/ν.

Συνεπώς $E\cap f(E)=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}U_n\cap\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}f(U_n)$ και $U_n, f(U_n)$ ανοιχτά και πυκνά υπσ/ν

Άρα από Baire I $E\cap f(E)$ πυκνό στον X

Ειδικότερα $E\cap f(E)\neq\emptyset$

Άσκηση

Έστω $f,g:(X,d)\to(Y,\rho)$ συνεχείς και $x\in X$ με $f(x)\neq g(x)$. Ν.δ.ο. υπάρχει $r>0$ ώστε αν $y,z\in B(x,r)$ τότε $f(y)\neq g(z)$.

Λύση

Αφού $f(x) \neq g(x)$, τότε θεωρώ $\varepsilon = \dfrac{\rho(f(x), g(x))}{2} > 0$.

Αφού f συνεχής στο x, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε

αν $y \in B_d(x, \delta_1) \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$

Αφού g συνεχής στο x, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε

αν $z \in B_d(x, \delta_2) \Rightarrow \rho(g(z), g(x)) < \varepsilon$

Θεωρούμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Τότε αν $y, z \in B_d(x, \delta)$

$\Rightarrow y \in B_d(x, \delta_1)$ και $z \in B_d(x, \delta_2)$

Οπότε $\rho(f(y), f(x)), \rho(g(z), g(x)) < \varepsilon = \dfrac{\rho(f(x), g(x))}{2}$

Συνεπώς $\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(f(y), g(z)) +$

$$+ \rho(g(z), g(x)) <$$

$$< \varepsilon + \rho(f(y), g(z)) + \varepsilon = 2\varepsilon + \rho(f(y), g(z))$$

$$\Rightarrow \rho(f(x), g(x)) < \rho(f(x), g(x)) + \rho(f(y), g(z))$$

$$\Rightarrow \rho(f(y), g(z)) > 0 \Rightarrow f(y) \neq g(z) \quad \forall y, z \in B_d(x, \delta)$$

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ και $D \subseteq X$. Ν.δ.ό τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Το D είναι πυκνό στον X

β) Για κάθε $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχή με $f(x) = 0 \ \forall x \in D$ ισχύει ότι $f \equiv 0$

Λύση

α) ⇒ β) Έστω ότι D πυκνό και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) = 0$ $\forall x \in D$.

Έστω $x \in X$. Αφού D πυκνό υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο D με $x_n \xrightarrow{d} x \overset{f \text{ συν}}{\Longrightarrow} f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$

Όμως αφού $x_n \in D$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Από μοναδικότητα ορίου $f(x) = 0$

Άρα $f \equiv 0$

β) ⇒ α) Θεωρούμε $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = dist(x, D)$.

Τότε f (Lipschitz) συνεχής και αν $x \in D$ ισχύει ότι $f(x) = 0$. Από υπόθεση $f \equiv 0$, δηλαδή $f(x) = 0$ $\forall x \in X$

Όμως $f(x)=0 \iff dist(x,D)=0 \iff x\in\bar{D}$

Άρα $\bar{D}=X$. Συνεπώς D πυκνός στον X

Άσκηση

Έστω $f,f_n:[a,\beta]\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι ($f_n\to f$ κατά σημείο και) Δε μας χρειάστηκε $\forall x\in[a,\beta]$ υπάρχει ανοικτό διάστημα I_x με $x\in\bar{I}_x$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $I_x\cap[a,\beta]$. Ν.Δ.ό. $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[a,\beta]$

Λύση

Έστω $x\in[a,\beta]$. Τότε υπάρχει ανοικτό διάστημα I_x με $x\in\bar{I}_x$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $I_x\cap[a,\beta]$

Τότε όμως $[a,\beta] \subseteq \bigcup_{x\in[a,\beta]} I_x$, διότι $x \in I_x$ $\forall x \in [a,\beta]$

Όμως $[a,\beta]$ συμπαγές και $(I_x)_{x\in[a,\beta]}$ ανοικτό κάλυμμά του. Οπότε υπάρχουν $x_1,\dots,x_m \in [a,\beta]$ ώστε

$$[a,\beta] \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} I_{x_k} \quad (1)$$

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα στο $I_{x_k}\cap[a,\beta]$ $\forall\, 1\le k\le m$, υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n\ge n_k$ και $\forall x\in I_{x_k}\cap[a,\beta]$ να ισχύει ότι $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ (2)

Θεωρώ $n_0=\max\{n_1,\dots,n_m\}$. Τότε αν $n\ge n_0$

και $x\in[a,\beta]$, έχουμε ότι υπάρχει $1\le k\le m$ ώστε $x\in I_k$ λόγω (1). Τότε $x\in I_k\cap[a,\beta]$

Συνεπώς, αφού $n\ge n_0\ge n_k$, τότε από (*)

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Άρα έχουμε δείξει ότι $\forall n\ge n_0$ και $\forall x\in[a,\beta]$

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow \|f_n-f\|_\infty\le\varepsilon \quad \forall n\ge n_0$

Άρα $f_n\xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα

Άσκηση

Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων η οποία είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα επί του $\mathbb{Q}$. Ν.δ.ό η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Θ.δ.ό $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα βασική επί του $\mathbb{R}$ και άρα από κριτήριο Cauchy θα είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα επί του $\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Αφού $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομ. συγκλ. επί του $\mathbb{Q}$, τότε είναι ομοιόμορφα βασική επί του $\mathbb{Q}$

Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall q \in \mathbb{Q}$ και $\forall m, n \geq n_0$

Να ισχύει ότι $|f_n(q) - f_m(q)| < \varepsilon$

Αφού $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών ώστε $q_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

Τότε όμως, αν $m, n \geq n_0$, έχουμε ότι $|f_n(q_k) - f_m(q_k)| < \varepsilon$

$\xRightarrow{k\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

f_n, f_m συν

Δείξαμε επομένως ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\forall m, n \geq n_0$

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$

Άρα $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα βασική επί του $\mathbb{R}$

Άσκηση

Έστω (X,d), όπου d η διακριτή μετρική.

Ν.δ.ό (X,d) πλήρης

Λύση

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική στον (X,d). Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n \geq n_0$ $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$.

$$\overset{d \text{ διακριτή}}{\Longrightarrow} x_m = x_n = x_{n_0} \quad \forall m,n \geq n_0$$

Οπότε $x_n \xrightarrow{d} x_{n_0}$ (είναι τελικά σταθερή)

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα.

Οπότε (X,d) πλήρης.

β) Έστω ρ μια άλλη μετρική στον X, ισοδύναμη με την d. Είναι σωστό ότι και ο (X,ρ) είναι πλήρης;

<u>Λύση</u>

Είναι λάθος

Θεωρώ $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ και $(X,\rho) = (X, |\cdot|)$

Κάθε d-συγκλίνουσα στο $x \in X$, είναι τελικά σταθερή. Άρα θα είναι και ρ-συγκλίνουσα στο $x \in X$.

Αντίστροφα κάθε ρ-συγκλίνουσα στο $x \in X$, θα είναι επίσης τελικά σταθερή, διότι όλα

τα σημεία του X είναι ρ-μεμονωμένα.
Οπότε θα είναι και d-συγκλίνουσα στο $x \in X$

Άρα ρ και d ισοδύναμες

Όμως ο (X,ρ) δεν είναι πλήρης, αφού
X δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R},|\cdot|)$ που
είναι πλήρης (π.χ $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $0 \notin X$)

Εναλλακτικά $(X,\rho) = (\mathbb{N},\rho)$, όπου $\rho(m,n) =$
$= |\arctan(n) - \arctan(m)|$. Και εδώ
οι συγκλίνουσες ακολ. είναι τελικά σταθερές (*),
και άρα $d \sim \rho$. Όμως ο (X,ρ) δεν είναι πλήρης
διότι η $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ρ-βασική και όχι ρ-συγκλίνουσα

(*) Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x \Rightarrow \arctan(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} \arctan(x)$

$(x_n, x \in \mathbb{N})$ $\overset{\tan \text{ συν}}{\Longrightarrow}$ $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$ και αφού $x_n, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n$ τελικά σταθερή.

Άσκηση

Έστω (X,d) ολικά φραγμένος και $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολό του.

Θεωρούμε $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = dist(x, \{x_1, \dots, x_n\})$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$. Ν.δ.ο. $f_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ ομοιόμορφα

<u>Λύση</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού (X,d) ολικά φραγμένος, τότε υπάρχουν $y_1, y_2, \dots, y_m \in X$ ώστε $X = B(y_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(y_m, \frac{\varepsilon}{2})$

Αφού $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ πυκνό $\forall 1 \leq k \leq m$ υπάρχει $x_{n_k} \in D \cap B(y_k, \frac{\varepsilon}{2})$.

Θεωρούμε $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Έστω τώρα $x \in X$ και $n \geq n_0$.

Τότε $f_n(x) = dist(x, \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$

Όμως αφού $X = B(y_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(y_m, \frac{\varepsilon}{2})$, υπάρχει $1 \leq k \leq m$ ώστε $d(x, y_k) < \frac{\varepsilon}{2}$

Τότε $d(x, x_{n_k}) \leq d(x, y_k) + d(y_k, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$)

δηλαδή $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$

Όμως $f_n(x) = dist(x, \{x_1, \dots, x_n\}) =$

$= \inf\{d(x, x_i) : 1 \leq i \leq n\} =$

$= \min\{d(x, x_i) : 1 \leq i \leq n\} \leq d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$

Άρα δείξαμε ότι $\forall n \geq n_0$ και $\forall x \in X$

ισχύει $|f_n(x)| = f_n(x) < \varepsilon \Rightarrow \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

Άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα.

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ., $f: X \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Αν f ομ. συνεχής και φραγμένη και g συνεχής, τότε $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση

Αφού f φραγμένη, τότε υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)| \leq M \ \forall x \in X$, δηλαδή $f(x) \in [-M, M] \ \forall x \in X$

(Εδώ, ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι χώρος με νόρμα. Άρα $\operatorname{diam}(f(X)) < +\infty$ είναι ισοδύναμο με αυτό που γράψαμε)

Τώρα $g|_{[-M,M]} : [-M,M] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού είναι συνεχής σε συμπαγές

Οπότε έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $d(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Αφού f ομ. συνεχής, τότε $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Όμως $f(x_n), f(y_n) \in [-M,M]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $g|_{[-M,M]}$ είναι ομ. συνεχής.

Άρα $\left|g|_{[-M,M]}(f(x_n)) - g|_{[-M,M]}(f(y_n))\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Leftrightarrow |g\circ f(x_n) - g\circ f(y_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα $g\circ f$ ομ. συνεχής

Άσκηση

Έστω d μετρική στο $\mathbb{Q}$, ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική.

Ν.δ.ό ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης.

Λύση

Θεωρούμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$

Τότε G_n είναι d-ανοικτό $\forall n \in \mathbb{N}$, διότι είναι συμπλήρωμα μονοσυνόλου.

Θ.δ.ό το G_n είναι d-πυκνό στο $\mathbb{Q}$

Πράγματι, έχουμε ότι $\overline{G_n}^d = G_n$ ή $\overline{G_n}^d = \mathbb{Q}$

. Έστω ότι $G_n = \overline{G_n}^d$. Τότε G_n είναι d-κλειστό

$\Rightarrow$ G_n είναι $|\cdot|$-κλειστό διότι $d \sim |\cdot|$

Οπότε $\overline{G_n}^{|\cdot|} = G_n$ — άτοπο διότι γνωρίζουμε ότι $\overline{G_n}^{|\cdot|} = \mathbb{Q}$

Άρα $\overline{G_n}^d = \mathbb{Q}$, δηλαδή G_n d-πυκνό στο $\mathbb{Q}$

Όμως επίσης G_n d-ανοικτό.

Αν ο $(\mathbb{Q}, d)$ είναι πλήρης, τότε από

Βαλτε θα είχαμε ότι $\bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} G_n$ θα ήταν d-πυκνό. Όμως $\bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} G_n = \bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} \mathbb{Q}\setminus\{q_n\} = \mathbb{Q}\setminus\bigcup_{n\geq 1}^{+\infty}\{q_n\} = \emptyset$

<u>Παρατήρηση</u>: Γενικά αν d, ρ ισοδύναμες μετρικές στον X, τότε <u>δεν</u> ισχύει ότι (X,d) πλήρης $\Leftrightarrow (X,\rho)$ πλήρης.

Σε αυτή την περίπτωση (του $\mathbb{Q}$) ισχύει διότι $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο και ο $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ έχει μόνο σ.σ.

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ και $A \neq \emptyset$, $A \subseteq X$.

Ν.δ.ό αν $A \subseteq B(x,r)$ για κάποια $x \in X$ και $r>0$, τότε $\forall y \in X$ υπάρχει $R>0$ ώστε $A \subseteq B(y,R)$

Λύση

Έστω $y \in X$.

Τότε αν $a \in A$ έχουμε ότι $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y)$

$< r + d(x,y) \Rightarrow d(a,y) < r + d(x,y)$ και

αυτό $\forall a \in A$

Οπότε αν θέσουμε $R = r + d(x,y)$, τότε $A \subseteq B(y,R)$

<u>Άσκηση</u>

Έστω (X,d) μ.χ

α) Αν $D \subseteq X$ πυκνό, τότε ν.δ.ο $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ $\forall G \subseteq X$ ανοιχτό

<u>Λύση</u>

Έστω $G \subseteq X$ ανοιχτό

Τότε $D \cap G \subseteq G \Rightarrow \overline{D \cap G} \subseteq \overline{G}$

Έστω $x \in \overline{Γ}$. Θέλουμε ν.δ.ό $x \in \overline{Δ \cap Γ}$, δηλαδή θ.ν.δ.ό $\forall ε > 0$ ισχύει ότι $B(x,ε) \cap (Δ \cap Γ) \neq \emptyset$

Πράγματι, έστω $ε > 0$. Αφού $x \in \overline{Γ}$, τότε $B(x,ε) \cap Γ \neq \emptyset$

Τώρα $B(x,ε) \cap Γ$ ανοικτό ως πεπερασμένη τομή ανοικτών και μη κενό. Συνεπώς αφού $Δ \subseteq X$ πυκνό έπεται ότι $Δ \cap B(x,ε) \cap Γ \neq \emptyset$, δηλαδή $B(x,ε) \cap (Δ \cap Γ) \neq \emptyset$

Άρα $x \in \overline{Δ \cap Γ}$

β) Έστω $A, B \subseteq X$

Αν A κλειστό και $A^{o} = B^{o} = \emptyset$, τότε $(A \cup B)^{o} = \emptyset$

Λύση

Αφού A κλειστό $\Leftrightarrow$ A^c ανοικτό

Τώρα $A^\circ = B^\circ = \emptyset \Leftrightarrow (A^\circ)^c = (B^\circ)^c = X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{A^c} = \overline{B^c} = X$.

Οπότε A^c ανοικτό και πυκνό και B^c πυκνό

Οπότε από α) $\overline{A^c} = \overline{A^c \cap B^c} \Leftrightarrow \overline{A^c \cap B^c} = X$

$\Leftrightarrow \overline{(A \cup B)^c} = X \Leftrightarrow [(A \cup B)^\circ]^c = X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \cup B)^\circ = \emptyset$

Παρατήρηση: Ισοδύναμα Γιατί πάλι (με το B) θα ήταν η σχέση: Τομή ανοικτού και πυκνού με πυκνό είναι πυκνό.

Άσκηση

Έστω (K,d) συμπαγής μ.χ. και $f: K \to \mathbb{R}$ συνεχής.

α) Ν.δ.ό f ομοιόμορφα συνεχής

Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$

Έστω $x \in K$. Τότε αφού f συνεχής, υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε αν ~~d(x~~ $y \in K$ με $d(x,y) < \delta_x$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή αν $y \in B(x, \delta_x)$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε όπως $K = \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{\delta_x}{2})$, διότι $\forall x \in K$ έχουμε ότι $x \in B(x, \frac{\delta_x}{2})$.

Αφού K συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ ώστε

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2}\right)$$

Θεωρώ $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\} > 0$.

Έστω λοιπόν $z, w \in K$ με $d(z,w) < \delta$.

Τότε $z \in B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2})$ για κάποιο $1 \le k \le n$

Τότε $w \in B(x_k, \delta_{x_k})$. Πράγματι, $d(w, x_k) \le$

$$\le d(w,z) + d(z,x_k) < \delta + \frac{\delta_{x_k}}{2} \le \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_{x_k}$$

$\Rightarrow d(w, x_k) < \delta_{x_k}$.

Οπότε $z, w \in B(x_k, \delta_{x_k})$. Συνεπώς $|f(z)-f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|f(w)-f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Τότε $|f(z) - f(w)| \leq |f(z)-f(x_k)| + |f(x_k)-f(w)|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

β) Ν.δ.ο $f(K)$ συμπαγές.

Λύση

Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $f(K)$. Τότε υπάρχουν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο K ώστε $f(x_n) = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αφού K συμπαγές, υπάρχει $x \in K$ και

$(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. με $x_{k_n} \xrightarrow{d} x$. $\xrightarrow{f \text{ συν}}$ $f(x_{k_n}) \xrightarrow{|\cdot|} f(x)$

Άρα βρήκαμε συγκλίνουσα υπακολουθία, την $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$

γ) Ν.δ.ό η $f: K \to \mathbb{R}$ παίρνει ελάχιστη τιμή.

<u>Λύση</u>

Δείξαμε στο β) ότι αφού f συνεχής και K συμπαγές, τότε $f(K)$ συμπαγές και $f(K) \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή το $f(K)$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Οπότε ορίζεται το $\inf(f(K)) =$

$= \inf\{f(x) : x \in K\}$. Θ.ν.δ. ό είναι minimum

Από ισοδύναμο χαρακ. του infimum υπάρχει

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο K ώστε $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \inf(f(K))$

Όμως αφού K συμπαγές, υπάρχει $x \in X$ και

$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ υπακολ. ως $x_{n_k} \xrightarrow{d} x \Rightarrow$

$\overset{f \text{ συν}}{\Rightarrow} f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \to +\infty} f(x)$. Όμως $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \to +\infty} \inf(f(K))$

Από μοναδικότητα ορίου $f(x) = \inf(f(K))$ και άρα είναι minimum