Άσκηση

Να εξεταστεί η κ.σ σύγκλιση και η ομοιόμορφη σύγκλιση των παρακάτω:

a) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$

Λύση

<u>κ.σ σύγκλιση</u>: Αν $x=0$, τότε $f_n(0)=0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Αν $x\neq 0$, τότε $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα $f_n \to f$ κ.σ όπου $f\equiv 0$

Ομοιόμορφη σύγκλιση: Αν $f_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ ομοιόμορφα, τότε $g = f$, αφού $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ κ.σ

Συνεπώς αρκεί να εξετάσουμε το $\|f_n - 0\|_\infty =$

$$= \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+nx^2} = \sup_{x\geq 0} \frac{x}{1+nx^2}$$

$$= \sup_{x\geq 0} f_n(x).$$

Έχουμε ότι $f_n'(x) = \dfrac{1+nx^2 - 2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$

$$f_n'(x) = 0 \iff 1 - nx^2 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Οπότε $\max\limits_{x \geq 0} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Οπότε $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ομοιόμορφα

β) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(t) = n\,t\,(1-t^2)^n$

Λύση

κ.σ σύγκλιση: Για $t \in \{0,1\}$ $g_n(t) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Για $t \in (0,1)$, $g_n(t) = n t (1-t^2)^n$

Από κρ. ρίζας $\sqrt[n]{n t (1-t^2)^n} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{t}(1-t^2) \xrightarrow{n\to\infty}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot 1 (1-t^2) = (1-t^2) < 1$, αφού $t \in (0,1)$

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(t) = 0$

Οπότε $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ κ.σ, όπου $g \equiv 0$

Ομοιόμορφη σύγκλιση: Υποψήφιο ομοιόμορφο όριο είναι η $g \equiv 0$. Άρα $\|g_n - 0\|_\infty = \|g_n\|_\infty =$

$$= \sup_{t\in[0,1]} |g_n(t)| \overset{g_n \geq 0}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \max_{t\in[0,1]} g_n(t) = \max_{t\in[0,1]} n t (1-t^2)^n$$

Έχουμε ότι $g_n'(t) = n(1-t^2)^n - 2n^2 t^2 (1-t^2)^{n-1} =$

$$= n(1-t^2)^{n-1}(1-t^2-2nt^2) =$$

$$= n(1-t^2)^{n-1}(1-(2n+1)t^2) =$$

$$= n(1-t^2)^{n-1}(2n+1)\left(\frac{1}{2n+1} - t^2\right)$$

Άρα

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$		1
$g_n'(t)$		$+$	0	$-$	0
$g_n(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα $\|g_n\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,1]} g_n(t) = g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) =$

$$= \frac{n}{\sqrt{2n+1}}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n = \frac{n}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n = \frac{n}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}}$$

$\xrightarrow{n\to\infty} (+\infty)\cdot\sqrt{\frac{7}{e}} = +\infty$

Άπλοποίηση $\|g_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$. Οπότε δεν έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

Άσκηση

Έστω (X,d), (Y,ρ) μ.χ και $f: X \to Y$ συνεχής.

Θεωρούμε σ μια μετρική γινόμενο στον $X\times Y$

α) Ν.δ.ό η $g: (X\times Y, \sigma) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$,

$g(x,y) = \rho(f(x), y)$ είναι συνεχής

Λύση

Έστω $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X\times Y$ με $(x_n, y_n) \xrightarrow{\sigma} (x, y)$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$

Αφού f συνεχής τότε $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$

Οπότε $|g(x_n, y_n) - g(x, y)| = |\rho(f(x_n), y_n) - \rho(f(x), y)|$

$\leq \rho(f(x_n), f(x)) + \rho(y_n, y) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Οπότε $g(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(x, y)$

Άρα g συνεχής

β) Ν.δ.ό το $A = \{(x,y) \in X \times Y : f(x) \in B_\rho(y, 1)\}$ είναι ανοικτό

Λύση

$A = \{(x,y) \in X \times Y : \rho(f(x), y) < 1\} =$

$= \{(x,y) \in X \times Y : g(x,y) < 1\} = g^{-1}((-\infty, 1))$

που είναι ανοικτό, διότι g συνεχής και $(-\infty, 1)$ ανοικτό.

Άσκηση

Αν $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς με $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα και $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \circ g_n \xrightarrow{n\to\infty} f\circ g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$

Λύση

Αφού $g_n(t) \in [0,1]$ $\forall t \in [0,1] \Rightarrow$ ορίζεται η $f_n \circ g_n$

Επίσης $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ ομοιόμορφα $\Rightarrow g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ κ.σ

Συνεπώς αφού $0 \leq g_n(t) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{n\to\infty} 0 \leq g(t) \leq 1$
και αυτό $\forall t \in [0,1]$

Άρα ορίζεται και η $f \circ g$.

Έστω τώρα $t \in [0,1]$.

$$|f_n \circ g_n(t) - f \circ g(t)| = |f_n(g_n(t)) - f(g(t))| \leq$$

$$\leq |f_n(g_n(t)) - f(g_n(t))| + |f(g_n(t)) - f(g(t))|$$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty + |f(g_n(t)) - f(g(t))| \quad (1)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$ (2)

Τώρα $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα και f_n συνεχής

$\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα f συνεχής. Μάλιστα $f:[0,1]\to[0,1]$

Αφού f συνεχής σε συμπαγές ($[0,1]$), τότε η f είναι ομ. συνεχής. Επομένως, υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x,y\in[0,1]$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Αφού $g_n\to g$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_0$ να ισχύει $\|g_n-g\|_\infty<\delta$, δηλαδή $\forall n\geq n_0$ και $\forall t\in[0,1]$ $|g_n(t)-g(t)|<\delta$

Από ομοιόμορφη συνέχεια της f $\forall n\geq n_0$ και $\forall t\in[0,1]$: $|f(g_n(t))-f(g(t))|<\frac{\varepsilon}{2}$ (3)

Θέτοντας λοιπόν $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε $\forall n \geq n_0$ και $\forall t \in [0,1]$

από (1), (2), (3) έχουμε ότι

$$|f_n \circ g_n(t) - f \circ g(t)| \overset{(1)}{\leq} \|f_n - f\|_\infty + |f(g_n(t)) - f(g(t))|$$

$$\underset{(3)}{\overset{(2)}{<}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Άρα $\forall n \geq n_0$ $\|f_n \circ g_n - f \circ g\|_\infty \leq \varepsilon$

Συνεπώς $f_n \circ g_n \xrightarrow{n \to \infty} f \circ g$ ομοιόμορφα

Προσοχή

Δεν ισχύει ότι $\|f \circ g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Ισχύει ότι $\|f \circ g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, διότι

$$\|f \circ g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(g(x))| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

π.χ. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, $g(x) = \frac{1}{4}$, $x \in [0,1]$

$$\|f\|_\infty \|g\|_\infty = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \|f \circ g\|_\infty = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X, $x\in X$.

Θέτουμε $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

α) Αν $x\in A'$, ν.δ.ό υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty} x$

Λύση

Για $\varepsilon=1$, έχουμε ότι $B(x,1)\cap A$ άπειρο σύνολο αφού $x\in A'$. Άρα υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $d(x_{n_1},x)<1$

Έστω ότι έχουμε βρει $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ώστε

$d(x_{n_i}, x) < \frac{1}{i}$ $\forall\, 1 \leq i \leq k$ (επαγ. υπόθεση).

Για $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$, έχουμε ότι το $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$

άπειρο, διότι $x \in A'$.

Οπότε υπάρχει $n_{k+1} > n_k$ ώστε $d(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$

(διότι αν δεν υπήρχε τέτοιος δείκτης, τότε

$B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_{n_k}\}$, δηλαδή

θα ήταν πεπερασμένο — άτοπο)

Οπότε επαγωγικά ορίζουμε $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα ακολ. ~~θε~~ φυσικών αριθμών

ώστε $d(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και

$$x_{k_n} \xrightarrow{n\to+\infty} x$$

β) Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, τότε $\operatorname{card}(A') =$

$= |A'| \leq 1$, δηλ. το A' περιέχει το πολύ ένα

σημείο

Λύση

Έστω ότι υπάρχουν $x, y \in A'$ με $x \neq y$. Τότε από α) υπάρχουν υπακολουθίες $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ και $(x_{m_λ})_{λ \in \mathbb{N}}$ ώστε $x_{k_n} \to x$, $x_{m_λ} \to y$

Όμως αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική και έχει συγκλ. υπακολουθία, τότε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσα.

Άρα όλες οι υπακολουθίες της θα συγκλίνουν στο ίδιο όριο $\Rightarrow x = y \rightarrow$ άτοπο

Παρατήρηση

Η υπόθεση η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να είναι βασική είναι απαραίτητη π.χ. $x_n = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & \text{αν } n = 2k \\ 1 + \frac{1}{2k-1}, & \text{αν } n = 2k-1 \end{cases}$

Τότε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όχι βασική και $0, 1 \in A'$

γ) Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και $A' \neq \emptyset$, τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα.

Λύση

Έστω $x \in A'$, αφού $A' \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική + συγκλ. υπακολ. $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλ.

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ.

Ν.δ.ό X πλήρης $\Leftrightarrow$ κάθε αριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρες.

Λύση

($\Rightarrow$) Αν X πλήρης και $F \subseteq X$ αριθμήσιμο κλειστό, τότε αφού F κλειστό είναι πλήρες.

($\Leftarrow$) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία. Θ.δ.ό είναι συγκλίνουσα.

Θεωρούμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ που είναι αριθμήσιμο.
Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) Αν A κλειστό, τότε A κλειστό αριθμήσιμο και άρα είναι πλήρες. Όμως $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολ. στο A. Άρα υπάρχει $x \in A$ με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

ii) Αν A όχι κλειστό, τότε $\overline{A} = A \cup A'$. Οπότε αφού $A \neq \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow A' \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει $x \in A'$. Από προηγ. Άσκηση υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_n} \to x$

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική + συγκλ. υπακολ. $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλ.

Οπότε σε κάθε περίπτωση (x_n) Cauchy συγκλίνουσα και άρα (X,d) πλήρης.

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. και $\rho = \min\{d,1\}$. Δείξτε ότι η ρ είναι μετρική

α) Ν.δ.ό. $id = I : (X,d) \to (X,\rho)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής με ομοιόμορφα συνεχή αντίστροφη

Λύση

$I : (X,d) \to (X,\rho)$ ομ. συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγω $\delta = \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\} > 0$

Συνεπώς, αν $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$, τότε

$$d(x,y) < \frac{1}{2}$$

Οπότε $\rho(I(x), I(y)) = \rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \overset{d(x,y) < \frac{1}{2} < 1}{=}$

$$= d(x,y) < \delta \leq \varepsilon \Rightarrow \rho(I(x), I(y)) < \varepsilon$$

<u>$I^{-1} : (X, \rho) \to (X, d)$ ομ. συνεχής</u>

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγω $\delta = \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$.

Έστω λοιπόν $x, y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \min\{1, d(x,y)\} < \delta \overset{\delta \leq \frac{1}{2}}{\Longrightarrow} d(x,y) < \delta$$

$\Leftrightarrow d\left(I^{-1}(x), I^{-1}(y)\right) < \delta \leq \varepsilon$

β) (X,d) πλήρης $\Leftrightarrow$ (X,ρ) πλήρης

<u>Λύση</u>

($\Rightarrow$) Έστω ότι (X,d) πλήρης.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρ-βασική ακολουθία.

Αφού η $I^{-1}:(X,\rho)\to(X,d)$ ομ. συνεχής

$\Rightarrow \left(I^{-1}(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-βασική $\Leftrightarrow$

$\iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-βασική

Αφού (X,d) πλήρης, υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$. Τώρα η $I:(X,d)\to(X,\rho)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής $\overset{\text{αρχή μεταφ}}{\Longrightarrow}$

$$I(x_n)\xrightarrow{\rho} I(x) \iff x_n \xrightarrow{\rho} x$$

Οπότε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρ-συγκλίνουσα

Άρα (X,ρ) πλήρης

($\Leftarrow$) Εντελώς συμμετρικά.

Άσκηση

Έστω $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και σ μια μετρική γινόμενο στον $X\times Y$.

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\rho)$

Υποθέτουμε ότι (Y,ρ) συμπαγής και ότι

$Gr(f)=\{(x,f(x)):x\in X\}\subseteq X\times Y$ κλειστό

Ν.δ.ό η f είναι συνεχής

Λύση

Έστω ότι f όχι συνεχής. Τότε υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x$ στο X με $x_n\to x\in X$ και

$f(x_n) \not\to f(x)$.

<u>Ισχυρισμός</u>: Υπάρχει $\varepsilon>0$ και υπακολουθία $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $\rho(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \varepsilon$ $\forall k\in\mathbb{N}$

<u>Αποδ. Ισχυρισμού</u>: Αφού $f(x_n) \not\to f(x)$, τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$, να υπάρχει $N>n$ ώστε $\rho(f(x_N), f(x)) \geq \varepsilon$.

Συνεπώς για $n=1$, υπάρχει $n_1>1$ ώστε $\rho(f(x_{n_1}), f(x)) \geq \varepsilon$

Έστω ότι έχουμε βρει $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ώστε

$\rho(f(x_{n_i}), f(x)) \geq \varepsilon \quad \forall\, 1 \leq i \leq k$

Για $n = n_k$, υπάρχει $n_{k+1} > n_k$ ώστε $\rho(f(x_{n_{k+1}}), f(x)) \geq \varepsilon$

Από επαγωγή έπεται ο ισχυρισμός

Έχουμε ότι η $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ είναι ακολ. στον συμπαγή Y. Άρα υπάρχει $y \in Y$ και $(f(x_{n_{k_m}}))_{m \in \mathbb{N}}$ υπακολ. ώστε $f(x_{n_{k_m}}) \xrightarrow{\rho} y$

Όμως $x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow x_{n_{k_m}} \xrightarrow{d} x$

Αφού σ μετρική γινόμενο: $(x_{n_{k_m}}, f(x_{n_{k_m}})) \xrightarrow{\sigma} (x,y)$

Όμως $(x_{n_{k_m}}, f(x_{n_{k_m}})) \in Gr(f)$ που είναι κλειστό

Άρα $(x,y) \in Gr(f) \Rightarrow y = f(x)$

Οπότε $f(x_{n_{k_m}}) \xrightarrow[\rho]{m\to\infty} f(x)$, άτοπο διότι

$\rho(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho(f(x_{n_{k_m}}), f(x)) \geq \varepsilon$

$\forall m \in \mathbb{N}$

Άρα f συνεχής.

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. και $D \subseteq X$ πυκνό και $G \subseteq X$ ανοικτό και πυκνό. Ν.δ.ό $G \cap D$ πυκνό

Λύση

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θ.δ.ό $(G \cap D) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$

Αφού G πυκνό, τότε $B(x,\varepsilon) \cap G \neq \emptyset$.

Τώρα το $G \cap B(x,\varepsilon)$ είναι μη κενό και ανοικτό, ως πεπ. τομή ανοικτών.

Άρα αφού D πυκνό $D \cap (G \cap B(x,\varepsilon)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (G \cap D) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$

Άσκηση

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. πραγματικών αριθμών και $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n, & \text{αν } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \quad \left(x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

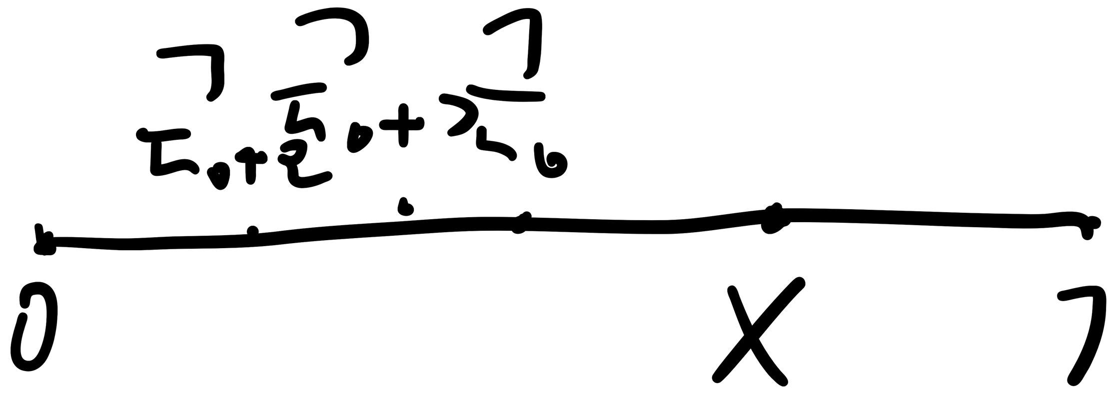
α) Να δείξετε ότι $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ κατά σημείο

β) Να εξετάσετε αν ισχύει η εξής ισοδυναμία: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ομοιόμορφα $\Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Λύση

α) Αν $x=0$, τότε $f_n(0)=0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Αν $x\in(0,1]$, τότε



υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} < x \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

β) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ομοιόμορφα $\Leftrightarrow \|f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow |a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ✓

αφού $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]} |f_n(x)| = |a_n|$

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. με X αριθμήσιμο.

α) Αν ο (X,d) πλήρης, ν.δ.ό. ο X έχει τουλάχιστον ένα μεμονωμένο σημείο

Λύση

Έστω $X=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του

Έστω ότι ο X δεν έχει μεμονωμένο σημείο.

Θεωρούμε $G_n = X\setminus\{x_n\} = \{x_n\}^c$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Τότε G_n ανοιχτό και G_n πυκνό, διότι

$$\overline{G_n} = \overline{\{x_n\}^c} = (\{x_n\}^o)^c \overset{x_n \text{ μ.σ}}{=} \emptyset^c = X$$

Οπότε από Baire $\bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} G_n$ πυκνό, αφού (X,d) πλήρης. Όμως $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n = \bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} X\setminus\{x_n\} =$

$$= X \setminus \bigcup_{n\geq 1}^{+\infty}\{x_n\} = X\setminus X = \emptyset \text{ — άτοπο}$$

Άρα ο X έχει μεμονωμένο σημείο.

β) Δώστε παράδειγμα αριθμήσιμου μ.χ. (X,d) που δεν έχει μεμονωμένα σημεία (τότε δε θα είναι πλήρης)

Λύση

Θεωρούμε $(X,d) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$, διότι σε κάθε $(q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί [illegible].

Άσκηση

Έστω $(X,d) = \left([0,+\infty), |\cdot| \right)$. Θεωρούμε $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων με $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα σε κάποια $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Αν $\forall n\in\mathbb{N}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Λύση

Έστω $x\in[0,+\infty)$. Τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x)| \quad (1)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει ότι $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

Οπότε λόγω (1): $|f(x)| \leq \|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(x)| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |f_{n_0}(x)| \quad \forall x \in X = [0, +\infty)$$

Όμως $\lim_{x \to +\infty} f_{n_0}(x) = 0$. Άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x > M$, τότε $|f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Συνεπώς, αν $x > M$, τότε $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$