Άσκηση

Το $\mathbb{N}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης ως υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Λύση

Το $x \in \mathbb{R}$ θα είναι σ.σ του $\mathbb{N} \iff \forall \varepsilon > 0$ ~~υπάρχει~~ το $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{N}$ είναι άπειρο

Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ όμως $B(x,\varepsilon) = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ που έχει μήκος 1

Οπότε $|B(x,\varepsilon)\cap \mathbb{N}| \leq 1$, δηλαδή δεν είναι άπειρο. Άρα το $x\in\mathbb{R}$ δεν είναι σ.σ του $\mathbb{N}$. Οπότε $\mathbb{N}' = \emptyset$

Άσκηση

Έστω (Y,ρ) πλήρης μ.χ και $f: Y \to \mathbb{Q}$ συνεχής. Ν.δ.ό υπάρχει $G\subseteq Y$ ανοικτό και μη κενό ώστε $f|_G$ σταθερή

Λύση

Έστω $\mathbb{Q} = \{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών

Θεωρώ την $F_n = f^{-1}(\{q_n\})$ που είναι κλειστό υποσύνολο του Y, ~~αφού $\{q_n$~~ σαν αντίστροφη εικόνα του κλειστού μονοσυνόλου $\{q_n\}$ μέσω συνεχούς συνάρτησης

<u>Ισχυρισμός</u>: $Y = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$

Πράγματι, αν $y \in Y$, τότε $f(y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(y) = q_n \Rightarrow y \in f^{-1}(\{q_n\}) = F_n$

Οπότε πράγματι $Y = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$

Αφού (Y,ρ) πλήρης από Baire II υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$

Θεωρώ $G = F_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$ και G ανοιχτό και

αν $y \in G \Rightarrow y \in F_{n_0} = f^{-1}(\{q_{n_0}\}) \Rightarrow f(y) = q_{n_0}$

Άρα $f|_G \equiv$ σταθ $\equiv q_{n_0}$

Άσκηση

Έστω $Q=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ και $\forall n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$Q_n=\{q_k : k\geq n\}$

Ν.δ.ό $\overline{Q_n}=\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Λύση

$Q_1 = Q \Rightarrow \overline{Q_1}=\mathbb{R}$

Για $n\geq 2$: Έστω $x\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$. Θ.δ.ό

$B(x,\varepsilon)\cap Q_n\neq\emptyset$

Έχουμε ότι $B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Από Α.Λ.Ι σε κάθε διάστημα υπάρχουν άπειροι ρητοί. Οπότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $q \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ και $q \neq q_1, \dots, q_{n-1}$

Τότε $q \in B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q}_n \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q}_n \neq \emptyset$

Άσκηση 1.4

Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ό οι παρακάτω είναι μετρικές στον X

a) $\rho_1 = \min\{d, 1\}$

β) $\rho_2 = \dfrac{d}{1+d}$

Λύση

α) i) $\rho_1(x,y) = \min\{d(x,y),1\} \geq 0$, αφού d μετρική

και $\rho_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{d(x,y),1\} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ αφού d μετρική

ii) $\rho_1(x,y) = \min\{d(x,y),1\} \overset{d \text{ μετρ}}{=} \min\{d(y,x),1\} =$

$= \rho_1(y,x)$

iii) + τριγωνική

β) i) ✓

ii) $d_2(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \overset{d \text{ μετρ}}{=} \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d_2(y,x)$

$d = d_1 + d_2$

$d_1(x,y) \geq 0$

i) $d(x,y) = 0 \iff d_1(x,y) = -d_2(x,y) \iff d_1(x,y) = d_2(x,y) = 0$

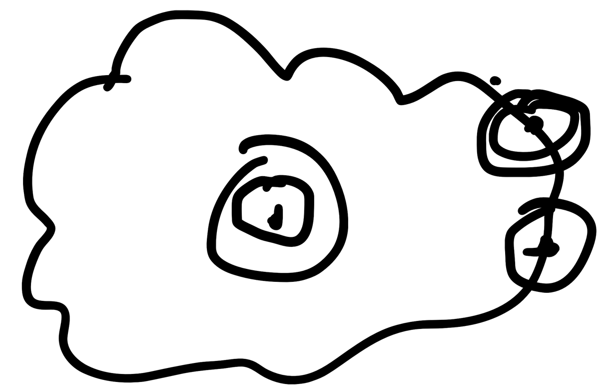
$d_2(x,y) \geq 0$

$\iff x = y$

• Αν έχουμε (X,d) μ.χ και $A \subseteq X$.

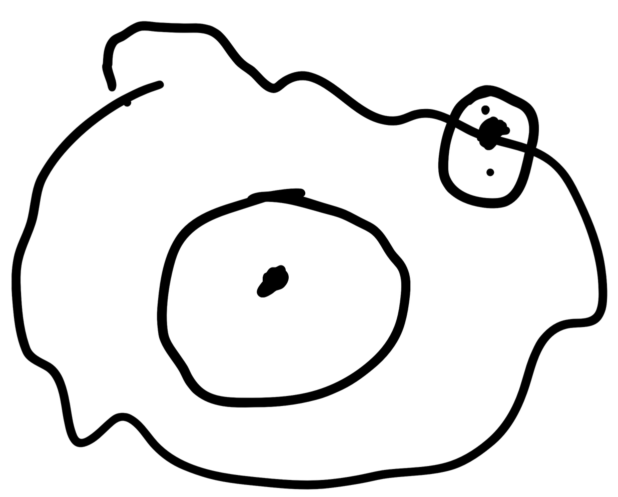
Ένα x λέγεται σημείο επαφής του $A \iff$

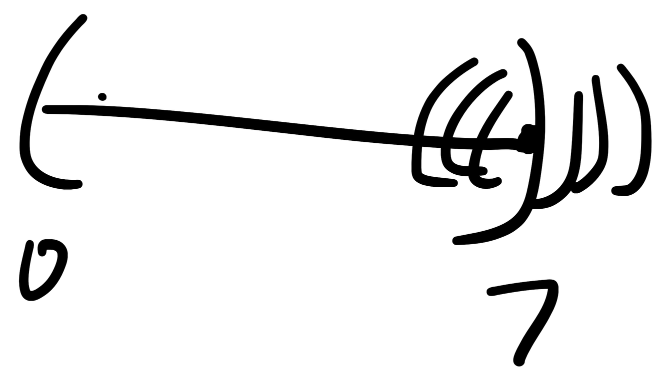
$\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$



$\iff$ υπάρχει (x_n) ακολ στο A με $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$

$$A = \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \implies \bar{A} = \{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

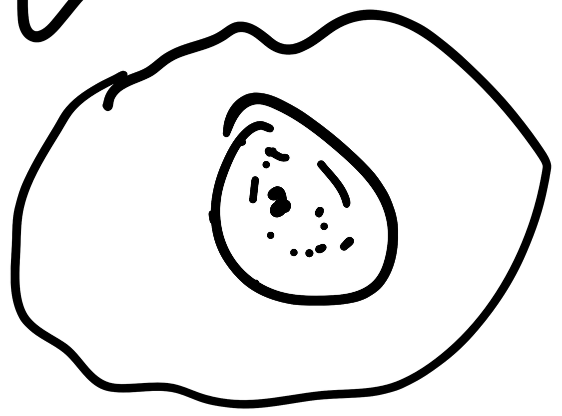




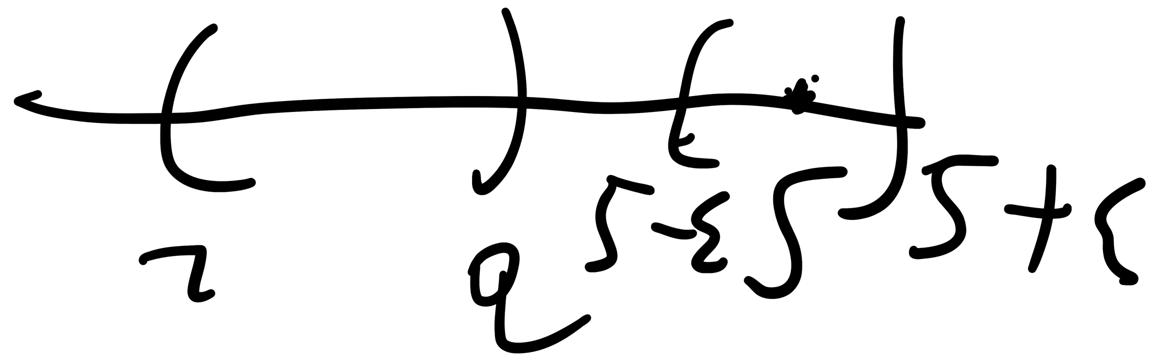
$$\bar{A} = A \cup A'$$

$x \in A' \iff B(x,\varepsilon)\cap A$ άπειρο $\forall \varepsilon > 0 \iff$

$\iff$ υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \neq x$ και $x_n \to x$



$A=(7,8)\cup\{5\}$



Άσκηση 6.74

Είχαμε δείξει ότι (X,d) συμπαγής και είχαμε βρει $h:(Y,\sigma)\to(X,d)$ ισομετρία επί, δηλαδή η ομοιομορφισμός. Γιατί ο (Y,σ) είναι συμπαγής;

Λύση

Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον Y.

Τότε $(h(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι ακολουθία στον X που είναι συμπαγής.

Άρα υπάρχει $(h(y_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in X$ ώστε $h(y_{k_n}) \xrightarrow{d} x$. Όμως, αφού h επί, τότε υπάρχει $y\in Y$ με $x=h(y)$.

Οπότε $h(y_{k_n}) \xrightarrow{d} h(y) \overset{h^{-1}\text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} h^{-1}(h(y_{k_n})) \xrightarrow{\sigma} h^{-1}(h(y))$ $\Leftrightarrow y_{k_n} \xrightarrow{\sigma} y$. Οπότε Y συμπαγής (*)

Παρατήρηση

Οι ομοιομορφισμοί διατηρούν/μεταφέρουν συμπάγεια αλλά όχι πληρότητα

(άλλος τρόπος - από θεωρία)

(*) Όπου $h^{-1} : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής και επί. Άρα $Y = h^{-1}(X)$, δηλαδή είναι εικόνα συμπαγούς μέσω συνεχούς συνάρτησης. Άρα Y συμπαγής

Άσκηση 4.76

Στη λύση της θέτει $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2, dist(A,B)\}$

Οπότε $\delta > 0$.

Παίρνουμε $x, y \in A \cup B$ με $\rho(x,y) < \delta \Rightarrow$

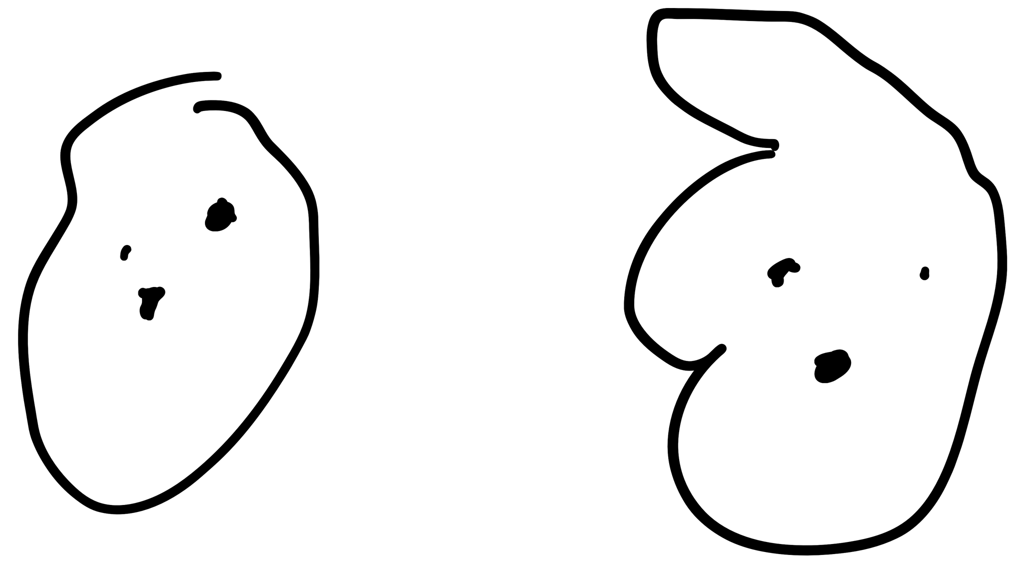
$\Rightarrow x, y \in A$ ή $x, y \in B$

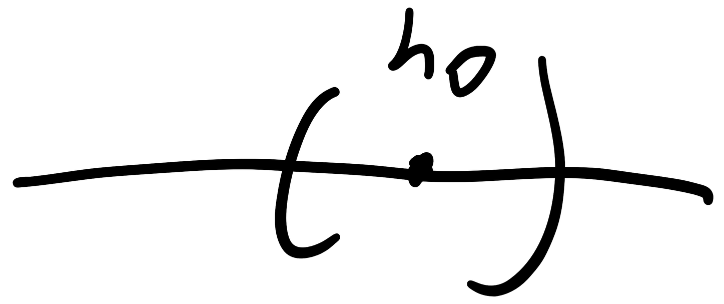
Αν ίσχυε ότι π.χ. $x \in A$ και $y \in B$, τότε

$dist(A,B) = \inf\{\rho(a,\beta) : a \in A, \beta \in B\} > \delta > \rho(x,y) \geq$

$x \in A, y \in B$

$\geq \operatorname{dist}(A, B)$ $\to$ jú zang





$f : \mathbb{N} \to (X, d)$