Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

Άσκηση 18

Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $f: X \to X$
με $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ $\forall x \neq y$.
Να δ.ό. η f έχει μοναδικό σταθερό
σημείο (δηλ. $f(x_0) = x_0$)

Λύση

Αρχικά η f είναι συνεχής, αφού από
υποθ. $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ $\forall x,y \in X$, δηλαδή
είναι Lipschitz (με σταθερά $L=1$)

<u>Μοναδικότητα</u>: Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$ σταθερά σημεία της f, δηλ. $f(x) = x$, $f(y) = y$

Τότε $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \rightarrow$ άτοπο από υπόθεση.

Άρα αν υπάρχει σταθερό σημείο, τότε αυτό είναι μοναδικό.

<u>Ύπαρξη</u>: Θεωρούμε $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = d(x, f(x))$

Η g είναι συνεχής, διότι αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\cancel{X}$ με $x_n \rightarrow x \overset{f \text{ συν}}{\Longrightarrow} f(x_n) \rightarrow f(x)$

Οπότε $|g(x_n)-g(x)| = |d(f(x_n),x_n) - \cancel{(x)} - d(f(x),x)| \leq$

$$\leq d(f(x_n),f(x)) + d(x_n,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0+0=0$$

Άρα $g(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$

Αφού g συνεχής και X συμπαγής, τότε η g παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $g(x_0) \leq g(x)$ $\forall x \in X$, δηλ. $d(x_0, f(x_0)) \leq d(x, f(x))$ $\forall x \in X$.

Ισχυρισμός: Το x_0 είναι σταθερό σημείο

Έστω προς άτοπο ότι δεν είναι. Τότε $f(x_0) \neq x_0$

Οπότε $d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0)$ από υπόθεση $\Leftrightarrow g(f(x_0)) < g(x_0) \to$ άτοπο διότι $g(x_0)$ ελάχιστο.

Άρα το x_0 σταθερό σημείο και τελειώσαμε

(*) **Υπενθύμιση**

Αν (X,d) μ.χ και $x,y,z,w \in X$, τότε

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$$

Αποδ

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(w,y)$$

$$(\Leftrightarrow)\ d(x,y) - d(z,w) \leq d(x,z) + d(w,y) \quad (1)$$

Όμοια $d(z,w) - d(x,y) \leq d(x,z) + d(w,y) \quad (2)$

Από (1),(2) $|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(w,y)$

Άσκηση 23

Έστω (X,d) μ.χ. Ν.Δ.ό τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές

β) Ο X είναι πλήρης και κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο

Λύση

α) ⇒ β) Ο X είναι πλήρης: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία. Τότε το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο σύνολο ($\operatorname{diam}(A) < +\infty$). Τότε όμως $\bar{A}$ φραγμένο, διότι $\operatorname{diam}(\bar{A}) = \operatorname{diam}(A) < +\infty$ και κλειστό.

Άρα από υπόθεση $\bar{A}$ συμπαγές.
Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λοιπόν είναι ακολουθία στο συμπαγές $\bar{A}$. Άρα υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in\bar{A}$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{k\to\infty} x$.
Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Άρα είναι συγκλίνουσα (στο x)

<u>Αν $B\subseteq X$ φραγμένο, τότε B ολικά φραγμένο</u>:

Αν $B\subseteq X$ φραγμένο, τότε $\bar{B}$ φραγμένο και κλειστό. Άρα $\bar{B}$ συμπαγές $\Rightarrow \bar{B}$ ολικά φραγμένο

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in X$ ώστε
$\overline{B} \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon)$
Τότε προφανώς $B \subseteq \overline{B} \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon)$

β) $\Rightarrow$ α) Έστω $A \subseteq X$ κλειστό και φραγμένο.
Αφού X πλήρης, τότε A πλήρες (ως κλειστό υποσύνολο του X)
Επίσης από υπόθεση, αφού A φραγμένο, είναι και ολικά φραγμένο.
Άρα το A είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.
Άρα A είναι συμπαγές

Άσκηση 97

Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $f: X \to X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $d(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Να δειχθεί ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Λύση

Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X που είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in X$ με $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Από συνέχεια της f όμως $f(x_{k_n}) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

Τότε $|d(f(x_{k_n}), x_{k_n})) - d(f(x), x)| \leq$

$$\leq d(f(x_{k_n}), f(x)) + d(x_{k_n}, x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Άρα $d(f(x_{k_n}), x_{k_n})) \xrightarrow{n \to \infty} d(f(x), x)$ (1)

Όμως $(d(f(x_{k_n}), x_{k_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολ.

της $(d(f(x_n), x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ και άρα

$d(f(x_{k_n}), x_{k_n}) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. (2)

Από (1),(2), λόγω μοναδικότητας ορίου

έπεται ότι $d(f(x), x) = 0 \iff f(x) = x$ και

άρα x σταθερό σημείο της f.

Υπενθύμιση (Θεώρημα Cantor)

Έστω (X,ρ) μ.χ. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

i) Ο (X,ρ) είναι πλήρης

ii) Για κάθε $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ισχύει ότι $\bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} F_n = \{x\}$

Άσκηση 79

Έστω (X,d) μ.χ. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

α) Ο (X,d) είναι συμπαγής

β) Κάθε $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X έχει μη κενή τομή.

Λύση

α) $\Rightarrow$ β) Με άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \emptyset$

Παίρνοντας συμπληρώματα: $X = \bigcup_{n\geq 1}^{+\infty} F_n^c$ και F_n^c ανοιχτά $\forall n \in \mathbb{N}$

Αφού X συμπαγής, τότε υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, αφού $(F_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άπειρο ανοιχτό κάλυμμα

Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $X = \bigcup_{n\geq 1}^{n_0} F_n^c \overset{\text{συμπλ}}{\iff} \emptyset = \bigcap_{n\geq 1}^{n_0} F_n \overset{F_n \downarrow}{\iff} F_{n_0} = \emptyset \to$ άτοπο αφού $F_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$

β) $\Rightarrow$ α) Θα δείξουμε ότι X πλήρης και ολικά φραγμένος

X πλήρης: Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ↓ ακολ. μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $diam(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Τότε από β) έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n \neq \emptyset$.

[Όμως $diam\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \leq diam(F_n)\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$\xRightarrow{n\to+\infty} diam\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ είναι το κενό σύνολο ή μονοσύνολο, διότι αν υπάρχαν $x\neq y$, $x,y\in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$, τότε θα ίσχυε $0<d(x,y)\leq diam\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right)$ — άτοπο]

Επομένως $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$

Άρα ικανοποιείται το θεώρημα Cantor και άρα το (X,d) είναι πλήρης

<u>Ο X είναι ολικά φραγμένος</u>: Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x_1, \ldots, x_n \in X$ να ισχύει ότι $B(x_1,\varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n,\varepsilon) \subsetneq X$

<u>Ισχυρισμός</u>: Υπάρχει $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X ώστε $\forall m,n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$ να ισχύει $d(y_m,y_n) \geq \varepsilon$

Έστω $y_1 \in X$ και κάνουμε επαγωγή.

Έστω ότι έχουμε βρει $y_1, \dots, y_k \in X$

ώστε $d(y_i, y_j) \geq \varepsilon \quad \forall 1 \leq i, j \leq k$ με $i \neq j$

Τότε όμως $B(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(y_k, \varepsilon) \subsetneq X$

Άρα υπάρχει $y_{k+1} \in X$ με $y_{k+1} \notin B(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(y_k, \varepsilon)$

Τότε $d(y_{k+1}, y_i) \geq \varepsilon \quad \forall 1 \leq i \leq k$.

Από επαγωγή έπεται ο ισχυρισμός.

Θεωρώ τώρα $\forall n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $F_n = \{y_k : k \geq n\}$.

Τότε προφανώς $F_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($y_n \in F_n$ π.χ)
και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ↓

Επίσης $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \emptyset$. Πράγματι, αν $y \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$

$\Rightarrow y \in F_1 = \{y_k : k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$ υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$

ώστε $y = y_{k_1}$. (1)

Όμως $y \in F_{k_1+1} = \{y_k : k \geq k_1+1\}$. Άρα

υπάρχει $k_2 \geq k_1+1 > k_1$ με $y = y_{k_2}$ (2)

Από (1),(2) $y_{k_1} = y_{k_2}$ → άτοπο γιατί

$k_2 > k_1 \Rightarrow d(y_{k_1}, y_{k_2}) \geq \varepsilon$ (τρόπος ορισμού
$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

Ισχυρισμός: F_n κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$

(Το F_n αποτελείται μόνο από μεμονωμένα σημεία

Εναλλακτικά αν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F_n με $z_n \to z$, όπου $z \in X$, έχουμε ότι η $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Άρα υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall \kappa, \lambda \geq \lambda_0$ να ισχύει ότι $d(z_\kappa, z_\lambda) < \varepsilon$

Άρα $\forall \kappa, \lambda \geq \lambda_0$ $z_\kappa = z_\lambda$, αφού είναι στοιχεία της ακολουθίας $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τα οποία ανά δύο απέχουν ~~περισσότερο~~ τουλάχιστον ε. Άρα $z = z_{\lambda_0} \in F_n \Rightarrow F_n$ κλειστό

Οπότε δείξαμε ότι υπάρχει $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \emptyset \to$ άτοπο από β)

Άρα ο X είναι ολικά φραγμένος

Άσκηση 7δ

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ συνεχής και $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ συμπαγών υποσυνόλων του X.

Να δειχθεί ότι $f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(K_n)$

__Λύση__

· $f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(K_n)$: Έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \subseteq K_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right) \subseteq f(K_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(K_n)$

· $\bigcap_{n=1}^{+\infty} f(K_n) \subseteq f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right)$: Έστω $y \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(K_n)$

Τότε $y \in f(K_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in K_n$ ώστε $f(x_n) \geq y$

Αφού $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x_n \in K_n \subseteq K_1$

Άρα η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο συμπαγές K_1. Άρα υπάρχει $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $x \in K_1$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{n \to \infty} x$

<u>Ισχυρισμός</u>: $x \in \bigcap_{n \geq 1}^{+\infty} K_n$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\forall m \geq n$ έχουμε ότι $k_m \geq k_n \geq n \Rightarrow K_{k_m} \subseteq K_n$ (με $K_n \downarrow$)

Άρα $\forall m \geq n$ ισχύει ότι $x_{k_m} \in K_{k_m} \subseteq K_n \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{k_m} \in K_n$ $\forall m \geq n$

Άρα η $(x_{k_m})_{m \geq n}$ είναι ακολουθία στο K_n που είναι συμπαγές και άρα κλειστό.

Αφού $x_{k_m} \xrightarrow[m \geq n]{m \to \infty} x$, έπεται ότι $x \in K_n$

Αφού το $n \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόν έπεται ότι $x \in \bigcap_{n \geq 1}^{+\infty} K_n$.

Οπότε $f(x) \in f\left(\bigcap_{n \geq 1}^{+\infty} K_n\right)$. Όμως $x_{k_n} \xrightarrow{n \to \infty} x$

f συνεχ.

$\Rightarrow f(x_{k_n}) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$

Όμως $f(x_{k_n}) = y$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Οπότε από μοναδικότητα ορίου $y = f(x)$,

δηλαδή $y \in f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right)$

Άσκηση

Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ ολικά φραγμένο.

Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in A$ ώστε

$$A \subseteq B(x_1,\varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n,\varepsilon)$$

Λύση

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού A ολικά φραγμένο, τότε υπάρχουν $x_1,\dots,x_n\in X$ ώστε $A\subseteq B(x_1,\frac{\varepsilon}{2})\cup\dots\cup B(x_n,\frac{\varepsilon}{2})$. Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι $B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})\cap A\neq\emptyset$ $\forall\, 1\le i\le n$.

Επιλέγω λοιπόν $y_i\in B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})\cap A$ $\forall\, 1\le i\le n$.

Ισχυρισμός: $A\subseteq B(y_1,\varepsilon)\cup\dots\cup B(y_n,\varepsilon)$

Πράγματι αν $y\in A$, τότε υπάρχει $1\le i\le k$

ώστε $y \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$.

Τότε $d(y, y_i) \le d(y, x_i) + d(x_i, y_i) <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow d(y, y_i) < \varepsilon \Rightarrow y \in B(y_i, \varepsilon)$

$\Rightarrow y \in B(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(y_n, \varepsilon)$

<u>Υπενθύμιση</u>

Έστω (X,d) μ.χ. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

i) Ο (X,d) είναι συμπαγής

ii) Αν $(F_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, τότε $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

(Λέμε ότι η οικογένεια $(A_j)_{j\in J}$ υποσυνόλων του X έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών και $\forall\, \Lambda \subseteq J$ πεπερασμένο ισχύει ότι $\bigcap_{j\in \Lambda} F_j \neq \emptyset$)

Άσκηση 26

Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $f: X \to X$ συνεχής. Θέτουμε $K_1 = X$ και γενικά $K_{n+1} = f(K_n)$.

i) Να δειχθεί ότι $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών

<u>Λύση</u>

Με επαγωγή: Αρχικά $K_1 = X$ συμπαγές και $K_2 = f(K_1) = f(X) \subseteq X = K_1$, δηλ. $K_2 \subseteq K_1$

Έστω τώρα ότι K_n συμπαγές και $K_{n+1} \subseteq K_n$. Θ.δ.ό K_{n+1} συμπαγές και $K_{n+2} \subseteq K_{n+1}$.

Πράγματι, $K_{n+1} = f(K_n)$, δηλαδή είναι συμπαγές ως εικόνα του συμπαγούς K_1 μέσω της συνεχούς συνάρτησης f

Επίσης $K_{n+1} \subseteq K_n \Rightarrow f(K_{n+1}) \subseteq f(K_n)$

$\Leftrightarrow K_{n+2} \subseteq K_{n+1}$ και άρα από επαγωγή ✓

ii) Αν $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$, τότε ν.δ.ο. $K \neq \emptyset$

<u>Λύση</u>

Θα δείξουμε ότι αφού ο (X,d) συμπαγής, τότε η $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~είναι~~ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Από υπόθεση ισχύει ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \neq \emptyset$

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο.

Τότε $A = \{n_1 < \ldots < n_k\}$. Οπότε

$$\bigcap_{j \in A} K_j = \bigcap_{j=1}^{k} K_{n_j} \overset{K_n \downarrow}{=} K_{n_k} \neq \emptyset \text{, διότι}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $K_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-1\text{-φορές}}(K_1)$

$$= \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-1\text{-φορές}}(X) \neq \emptyset$$

iii) Να δειχθεί ότι $f(K) = K$, δηλαδή ότι $f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$

Λύση

Αρχικά $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = K_1 \cap \bigcap_{n=2}^{+\infty} K_n =$

$$= X \cap \bigcap_{n=2}^{+\infty} K_n = \bigcap_{n=2}^{+\infty} K_n \overset{K_{n+1}=f(K_n)}{=} \bigcap_{n=2}^{+\infty} f(K_{n-1})$$

$$\overset{n-1=n}{=} \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(K_n)$$

Οπότε θ.ν.δ.ό $\bigcap_{n=1}^{+\infty} f(K_n) = f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right)$

Από Άσκηση 16, αφού $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία συμπαγών και $f: X \to X$ συνεχής έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα

~~Να Κάθ~~
Δεν ισχύει ότι κάθε φραγμένο σύνολο είναι ολικά φραγμένο.

Λύση

Έστω X άπειρο σύνολο (π.χ $X = \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}$) και d τη διακριτή μετρική.
Τότε ο (X, d) είναι φραγμένος αλλά όχι ολικά φραγμένος

~~$diam(X) =$~~

<u>X φραγμένος</u>: $diam(X) = \sup\{d(x,y) : x,y \in X\} < +\infty$

~~Φ~~

Άρα X φραγμένος

<u>X δεν είναι ολικά φραγμένος</u>:

Αν ήταν, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$

ώστε $X = B(x_1, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(x_n, \frac{1}{2}) =$

$= \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\longrightarrow$ άτοπο αφού X άπειρο