Υπενθύμιση

Έστω (K,d) μ.χ. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) Ο K είναι συμπαγής

ii) Κάθε ακολουθία στον K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

iii) Ο K είναι πλήρης και ολικά φραγμένος (δηλ. $\forall \varepsilon>0$ υπάρχουν $x_1,\dots,x_n \in K$ ώστε
$$K = B(x_1,\varepsilon)\cup\dots\cup B(x_n,\varepsilon)\ )$$

Θεώρημα

Έστω $(K_1,d_1),\dots,(K_n,d_n)$ συμπαγείς μ.χ. Θέτουμε $K = K_1\times\dots\times K_n$ και d μια μετρική γινόμενο στο K.
Τότε ο (K,d) είναι συμπαγής

Απόδειξη

Για $n=2$: $K = K_1\times K_2$. Έστω λοιπόν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον K. Ο K_1 είναι συμπαγής. Άρα υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in K_1$ ώστε

$x_{k_n} \xrightarrow{d_1} x$.

Αφού K_2 συμπαγής, υπάρχει $y \in K_2$ και $(y_{k_{n_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ υπακολ της $(y_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $y_{k_{n_m}} \xrightarrow{d_2} y$.

Επομένως επίσης $x_{k_{n_m}} \xrightarrow{d_1} x$ ως υπακολ.

Αφού d μετρική γινόμενο, τότε $z_{k_{n_m}} =$

$= (x_{k_{n_m}}, y_{k_{n_m}}) \xrightarrow{d} (x, y)$

Ασκήσεις κεφαλαίου 6

Άσκηση 6

Έστω (X,d) μ.χ.

α) Υποθέτουμε ότι $\exists\, \varepsilon>0$ ώστε $\forall x\in X$ το $\overline{B}(x,\varepsilon)$ συμπαγές. Ν.Δ.ό ο X είναι πλήρης.

β) Αν $\forall x\in X$ $\exists\, \varepsilon_{(x)}>0$ με $\overline{B}(x,\varepsilon)$ συμπαγές, τότε είναι ο X πλήρης;

Λύση

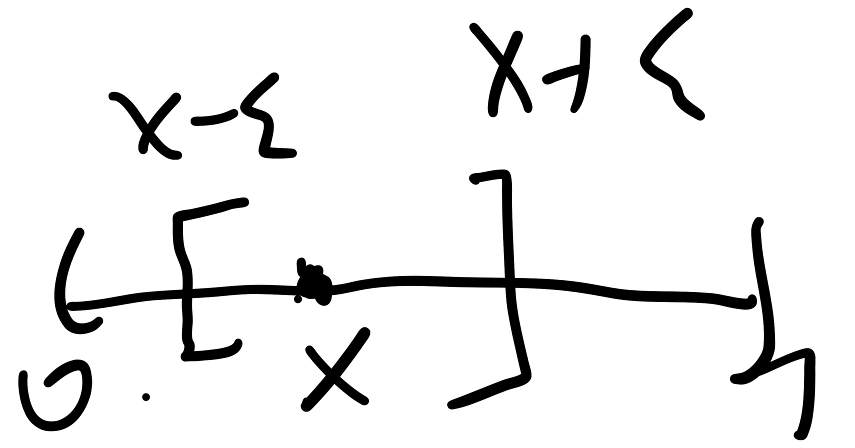
α) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον X.
Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n\geq n_0$ $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.
Οπότε $\forall n\geq n_0$ $d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon$

Οπότε $\forall n \geq n_0$ $x_n \in \overline{B}(x_{n_0}, \varepsilon)$ που είναι συμπαγές.

Δηλαδή η $(x_n)_{n \geq n_0}$ είναι ακολουθία σε συμπαγές. Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολ. ~~Ζη~~ $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $k_n \geq n_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Οπότε τώρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα

β) Θεωρούμε $X=(0,1)$ και ρ τη συνήθη μετρική
Τότε ο (X,ρ) δεν είναι πλήρης (γνωστό)
Έστω $x \in (0,1)$ και θέτουμε $\varepsilon_x = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\} > 0$



Τότε $\overline{B}(x,\varepsilon_x) \underset{|\cdot|\text{ νόρμα}}{=} \overline{B}(x,\varepsilon_x) = [x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x] \subseteq (0,1)$ που

είναι συμπαγές στο $(0,1)$.

<u>Ασκ. 11</u>

Έστω (X,d) μ.χ.

α) Αν $A_1,\dots,A_m$ ολικά φραγμένα, τότε και το

$\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ είναι ολικά φραγμένο

Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού A_i ολικά φραγμένα $\forall\, 1 \le i \le n$ υπάρχουν $x_1^{(i)}, \dots, x_{n(i)}^{(i)}$ ώστε ~~$A_i \subseteq B(x_i$~~

$$A_i \subseteq B(x_1^{(i)}, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{n(i)}^{(i)}, \varepsilon)$$

Τότε $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_1^{(i)}, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{n(i)}^{(i)}, \varepsilon)$

Που είναι πεπερασμένη ένωση ανοικτών μπαλών με ακτίνα $\varepsilon > 0$.

β) Αν A ολικά φραγμένο, τότε και το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο.

Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ ώστε

$$A \subseteq B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \dots \cup B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Τότε

$$\overline{A} \overset{(*)}{\subseteq} \overline{B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \dots \cup B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \subseteq$$

$$\subseteq \widehat{B}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \dots \cup \widehat{B}\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq$$

$$\subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon)$$ και

τελειώσαμε

$(*)$: $B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \widehat{B}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \forall\, 1 \le i \le n$

Άρα $B(x_1,\frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(x_n,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \hat{B}(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$

και το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών.

Άσκηση 13

Έστω (X,ρ) μ.χ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική.
Να δειχθεί ότι το $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο

Λύση

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n\geq n_0$ να ισχύει $d(x_m,x_n)<\varepsilon$. Τότε $\forall n\geq n_0$ ισχύει ότι $d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon$, επειδή $x_n\in B(x_{n_0},\varepsilon)$ $\forall n\geq n_0$

Οπότε $A \subseteq B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{n_0-1},\varepsilon) \cup B(x_{n_0},\varepsilon)$

και τελειώσαμε.

Άσκηση 29

Έστω $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής.
Αν ο X συμπαγής, ν.δ.ό $\forall A \subseteq X$ έχουμε
ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Λύση

• $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$: Έστω $y \in f(\overline{A})$. Τότε υπάρχει
$x \in \overline{A}$ με $f(x) = y$.

Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{d} x$. Τότε από συνέχεια της $f \Rightarrow$ ~~$f(x_n) \to f$~~
$f(x_n) \xrightarrow{\varrho} f(x)$

και $f(x_n) \in f(A)$ $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$.

Άρα $f(x) \in \overline{f(A)}$, δηλαδή $y \in \overline{f(A)}$

. $\underline{\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})}$: Έχουμε ότι $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(A) \subseteq f(\overline{A})$ (1)

Αφού X συμπαγής και $\overline{A}$ κλειστό, τότε το $\overline{A}$ είναι συμπαγές. Αφού f συνεχής,

τότε $f(\bar{A})$ συμπαγές υποσύνολο του Y)
Αφού $f(\bar{A})$ συμπαγές, θα είναι και κλειστό.
Άρα λόγω (7) $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$

Ασκ. 7.9

α) Έστω $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ ομοιόμορφα συνεχής.
Τότε η f απεικονίζει τα ολικά φραγμένα σε ολικά φραγμένα

Λύση
Έστω $A \subseteq X$ ολ. φραγμένο. Θέλουμε ν.δ.ό $f(A) \subseteq Y$ ολ. φραγμένο.

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού f ομ. συνεχής, υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x,y\in X$ με $d(x,y)<\delta$, τότε $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$ (1)

Αφού A ολ. φραγμένο, υπάρχουν $x_1,\dots,x_n\in X$ ώστε

$$A\subseteq B(x_1,\delta)\cup\dots\cup B(x_n,\delta)$$

Έστω $y\in f(A)$. Τότε υπάρχει $x\in A$, με $f(x)=y$.

Άρα υπάρχει $1\leq i\leq n$ με $x\in B(x_i,\delta)$, δηλαδή $d(x,x_i)<\delta$. Από (1): $\rho(f(x),f(x_i))<\varepsilon \Rightarrow$

$$\underset{\overset{\|}{y}}{f(x)}\in B(f(x_i),\varepsilon)\subseteq B(f(x_1),\varepsilon)\cup\dots\cup B(f(x_n),\varepsilon)$$

και αυτό για το τυχαίο $y\in f(A)$

Οπότε $f(A) \subseteq B(f(x_1),\varepsilon) \cup \dots \cup B(f(x_i),\varepsilon)$

β) Δείξτε ότι η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δε διατηρείται από ομοιομορφισμούς

Θεωρούμε $(X,d)=(\mathbb{R},|\cdot|)$, $(Y,\rho)=((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),|\cdot|)$

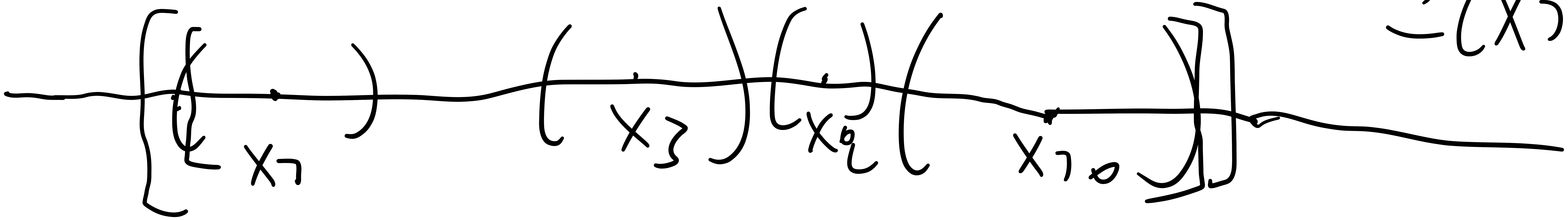
Έχουμε ότι η $f:(X,d)\to(Y,\rho)$,

$f(x)=\arctan x$ είναι ομοιομορφισμός

ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι ολικά φραγμένος

ενώ ο $((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),|\cdot|)$

Για $\varepsilon=1$, έστω ότι $\mathbb{R}=B(x_1,1)\cup \dots B(x_n,1)$



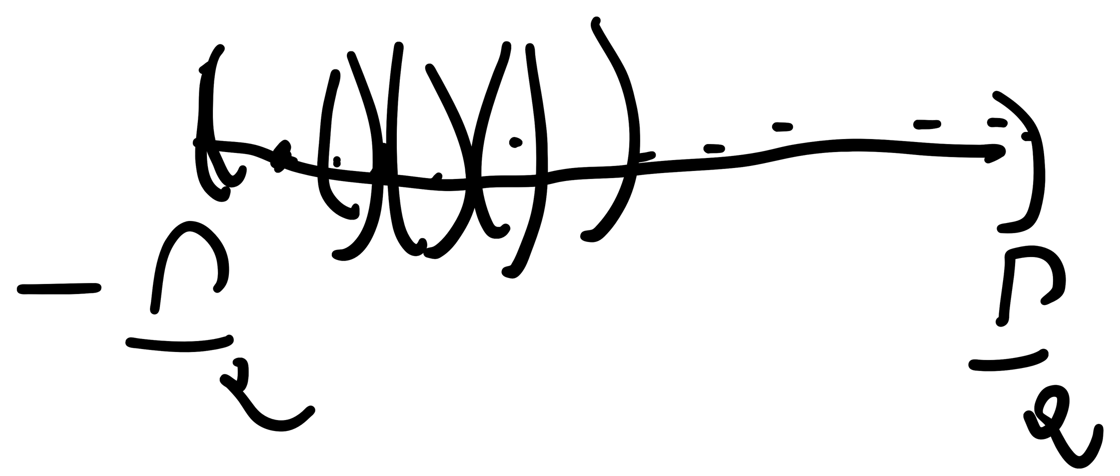
$\subset (x_1-1, x_1+1) \cup \dots \cup (x_n-1, x_n+1)$

Δηλαδή θα είχαμε ότι $\mathbb{R} \subseteq [\min\{x_i : 1 \leq i \leq n\} - 1, \max\{x_i : 1 \leq i \leq n\} + 1] = [-M, M]$

το οποίο είναι άτοπο.

Άρα ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ δεν είναι ολικά φραγμένος.

Αν $\varepsilon > 0$



$\xrightarrow{\text{Ομοιομορφικό}}$ $(0,1) = \bigcup_{n \geq 1} B(\cancel{x}n\varepsilon, \varepsilon)$

Άσκηση 74

α) Έστω (X,d) συμπαγής. Ν.δ.ό αν $f: X \to X$ ισομετρία, τότε η f είναι επί

Λύση

(Συμβολισμός: $f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-φορές}}(x)$

$f^0(x) = id(x) = x$)

Έστω ότι υπάρχει $f: X \to X$ ισομετρία που δεν είναι επί.

Τότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $x_0 \notin f(X)$. Αφού f συνεχής και X συμπαγής, τότε $f(X)$ συμπαγές

Οπότε $dist(x_0, f(X)) = \delta > 0$ (αφού $f(X)$ κλειστό)

Ορίζουμε $x_1 = f(x_0)$ και $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(δηλ. $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$, $x_n = f^{(n)}(x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Παρατηρούμε ότι $x_n \in f(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Αφού $f(X)$ συμπαγές, υπάρχει $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσα και άρα βασική.

Οπότε υπάρχουν $m > n$ με $d(x_{k_m}, x_{k_n}) < \delta$

$\Leftrightarrow d(f^{k_m}(x_0), f^{k_n}(x_0)) < \delta$

Όμως ~~δ~~ αφού f ισομετρία έχουμε ότι

$\cancel{d(x}$ $d(f^{km}(x_0), f^{kn}(x_0)) = d(f^{km-kn}(x_0), x_0)$

[Γιατί $d(f^{(n)}(x), f^{(m)}(y)) = d(x,y)$ $\forall x,y$ και

επιπλέον αν $k>n$, τότε $d(f^{k}(x), f^{n}(y)) =$

$= d(f^{k-n}(x), y)$]

Άρα $d(f^{km-kn}(x_0), x_0) < \delta$ και αφού

$km-kn > 0$, τότε $f^{kn-km}(x_0) \in f(X) \to$ άτοπο β) Έστω (X,d) συμπαγής και (Y,ρ) μ.χ. ώστε να υπάρχουν $g: X \to Y$, $h: Y \to X$ ισομετρίες. Τότε ο Y είναι συμπαγής

<u>Λύση</u>

Η $h \circ g : X \to X$ ισομετρία (ως σύνθεση ισομετριών) και X συμπαγής. Οπότε από α) η $h \circ g$ είναι επί.

Άρα $h(g(X)) = X$. Οπότε και η h είναι επί, γιατί $X = h(g(X)) \subseteq h(Y) \subseteq X$

Οπότε $h: Y \to X$ ισομετρία που είναι επί.
Άρα $h: Y \to X$ ~~το~~ ομοιομορφισμός. Οπότε
αφού X συμπαγής $\Rightarrow$ Y συμπαγής

Άσκ. 75

Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ κλειστών υποσυνόλων του X

α) Αν $G \subseteq X$ ανοικτό με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n \subseteq G$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $F_{n_0} \subseteq G$

<u>Λύση</u>

Αφού $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n \subseteq G \Rightarrow G^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n^c$ και G^c

κλειστό και άρα συμπαγές, αφού X συμπαγές

και F_n^c ανοικτά $\forall n \in \mathbb{N}$.

Οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $G^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} F_n^c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} F_n \subseteq G$

Αφού $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$, τότε $\bigcap_{n=1}^{n_0} F_n = F_{n_0}$

β) Αν $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \emptyset$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $F_{n_0} = \emptyset$

(και μάλιστα $F_n = \emptyset \ \forall n \geq n_0$)

Λύση

Παίρνουμε $G = \emptyset$ που είναι ανοιχτό και $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n \subseteq \emptyset$. Άρα από α) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{n_0} \subseteq \emptyset \Rightarrow F_{n_0} = \emptyset$

γ) Αν $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \{x\}$, τότε $diam(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \{x\} \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{3})$ που είναι ανοιχτό

Άρα υπάρχει από α) κάποιο n_0 ώστε $F_{n_0} \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{3})$

Τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε ότι ~~diam~~ $F_n \subseteq F_{n_0} \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{3})$

Οπότε $\forall n \geq n_0$ $\operatorname{diam}(F_n) \leq \operatorname{diam}(B(x, \frac{\varepsilon}{3})) \leq$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 28

Έστω (X, d) μ.χ. και $D \subseteq X$ πυκνό.

Αν κάθε ακολουθία στοιχείων του D έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (στο X), τότε ν.δ.ό ο (X,d) συμπαγής.

<u>Λύση</u>

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X.

Αφού D πυκνό, τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $d_n\in D$ ώστε $d(x_n,d_n) < \frac{1}{n}$

Αφού $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον D, τότε από υπόθεση, υπάρχει $(d_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in X$ ώστε $d_{n_k} \xrightarrow{d} x$

Τότε $d(x_{n_k},x) \le d(x_{n_k},d_{n_k}) + d(d_{n_k},x) \le \frac{1}{n_k} + d(d_{n_k},x)$

$\xrightarrow{k\to\infty} 0$. Άρα $x_{n_k} \xrightarrow{d} x$ ∎