2η Ενδιάμεση Εξέταση
Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα 1ο

Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{0\} \cup \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ως μετρικούς χώρους με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

(α) Αποδείξτε ότι, για οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, ρ), κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $g: A \to \mathbb{N}$ με $g(\frac{1}{n}) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής 1-1 απεικόνιση από το B στο $\mathbb{N}$.

Λύση

(α) Το αποδεικνύουμε με βάση τον ορισμό:
Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\delta = \frac{1}{2}$, έχουμε:
Αν $n, m \in \mathbb{N}$ με $|n-m| < \frac{1}{2}$, τότε $n = m$, άρα $f(n) = f(m)$, δηλαδή $|f(n) - f(m)| = 0 < \varepsilon$.

(β) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η g είναι συνεχής χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς:
Έστω $x = \frac{1}{n} \in A$ και ακολουθία (x_k) με $x_k = \frac{1}{n_k} \in A$, $k = 1, 2, \dots$, τέτοια ώστε $\frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{n}$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq k_0$, $\frac{1}{n_k} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right) \cap A$. Έπεται ότι, για κάθε $k \geq k_0$, $\frac{1}{n_k} = \frac{1}{n}$, δηλαδή η ακολουθία $\left(\frac{1}{n_k}\right)$ είναι τελικά σταθερή, άρα η $g\left(\frac{1}{n_k}\right) = n_k$, $k = 1, 2, \dots$ είναι τελικά σταθερή και ίση με n, άρα $g(\frac{1}{n_k}) \to g(\frac{1}{n})$.
Συμπεραίνουμε ότι η g είναι συνεχής στο $x = \frac{1}{n}$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής: Αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο A με $|x_n - y_n| \to 0$, αλλά $|g(x_n) - g(y_n)| \not\to 0$.

Επιλέγουμε τις: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και $y_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \longrightarrow 0$ αλλά $\left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = |n-(n+1)|$

δηλαδή $\left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Θα αποδείξουμε ότι τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει. Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι ο B έχει ένα σημείο συσσώρευσης (το 0), ενώ ο $\mathbb{N}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης:

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : B \to \mathbb{N}$ 1-1 και συνεχής και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Η ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{1}{n}$ του B συγκλίνει στο $0 \in B$, άρα θα πρέπει να ισχύει $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$. Όμως η f είναι 1-1, άρα η $(f(x_n))$ δεν είναι τελικά σταθερή (οι όροι της είναι διαφορετικοί ανά δύο) άρα δεν μπορεί να συγκλίνει στο $\mathbb{N}$. Άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι τέτοια f δεν υπάρχει.

Θέμα 2ο

(α) Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη μετρική ρ ως εξής:
$\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Εξετάστε αν ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης.

(β) Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, σ) για τους οποίους ισχύει το εξής:
Υπάρχει συνάρτηση $f: X \to Y$ 1-1, επί και τέτοια ώστε η f και η f^{-1} να είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης αν και μόνο αν ο (Y, σ) είναι πλήρης.

Λύση

(α) Αποδεικνύουμε ότι ο $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης:
Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{R}, \rho)$.
Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, δηλαδή $|x_n^3 - x_m^3| < \varepsilon$.
Έπεται ότι η ακολουθία (y_n) με $y_n = x_n^3, n \in \mathbb{N}$, είναι ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{R}, d)$, όπου d η συνήθης μετρική του $\mathbb{R}$. Αφού ο $(\mathbb{R}, d)$ είναι πλήρης, υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ με $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} y$, δηλαδή $x_n^3 \xrightarrow[n\to\infty]{d} y$, άρα $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sqrt[3]{y}$.
Θέτουμε $x = \sqrt[3]{y}$, οπότε έχουμε
$$\lim_{n\to\infty} |x_n^3 - x^3| = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
δηλαδή $x_n \to x$ με τη μετρική ρ.
Συμπεραίνουμε ότι ο $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης.

(β) Υποθέτουμε ότι ο (X,d) είναι πλήρης και θα αποδείξουμε ότι ο (Y,σ) είναι πλήρης.
Έστω (y_n) ακολουθία Cauchy στον Y.
Αφού η συνάρτηση $f^{-1}: Y \to X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, η ακολουθία $(f^{-1}(y_n))$ είναι Cauchy στον X.
(Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $y, y' \in Y$, αν $\sigma(y,y') < \delta$, τότε $d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) < \varepsilon$.
Αφού η ακολουθία (y_n) είναι Cauchy στον (Y,σ), υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\sigma(y_n, y_m) < \delta$.
Έπεται ότι, για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $d(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y_m)) < \varepsilon$, δηλαδή η ακολουθία $(f^{-1}(y_n))$ είναι ακολουθία Cauchy στον X.)
Αφού ο X είναι πλήρης, έπεται ότι υπάρχει $x \in X$ με $f^{-1}(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
Από τη συνέχεια της f παίρνουμε τώρα ότι $y_n = f(f^{-1}(y_n)) \to f(x)$ στον (Y,σ).
Έπεται ότι ο Y είναι πλήρης.

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται όμοια.

Θέμα 3ο

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, αποδείξτε ότι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(β) Έστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\mathbb{Q}_n = \{q_k \mid k \geq n\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Λύση

(α) Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής:
Έστω (X, d) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Αν το $x \in X$ είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε $x \in D$.
Πράγματι· αν το $x \in X$ είναι μεμονωμένο, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) = \{x\}$ (ισοδύναμα: το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό). Αφού το D είναι πυκνό στον X, θα πρέπει $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Έπεται ότι $\{x\} \cap D \neq \emptyset$, δηλαδή $x \in D$.

Εδώ έχουμε ότι υπάρχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X. Έστω M το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X. Από την προηγούμενη παρατήρηση, είναι $M \subseteq D$. Συμπεραίνουμε ότι το M είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(β) Έστω $n = 1, 2, \dots$ Για να δείξουμε ότι το $\mathbb{Q}_n$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}_n \neq \emptyset$. Όμως, όπως ξέρουμε, κάθε διάστημα περιέχει άπειρους ρητούς. Άρα, το διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ περιέχει τουλάχιστον έναν (στην πραγματικότητα άπειρους) q_k με $k \geq n$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Θέμα 4ο

(α) Έστω X ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και d μια μετρική στο X ώστε ο χώρος (X, d) να είναι πλήρης. Αποδείξτε ότι ο (X, d) έχει άπειρο πλήθος μεμονωμένων σημείων.

(β) Έστω (Y, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : Y \to \mathbb{Q}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα ανοικτό μη κενό υποσύνολο G του X πάνω στο οποίο η f είναι σταθερή.

Λύση

(α) Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι ο X έχει πεπερασμένο πλήθος μεμονωμένων σημείων, έστω n το πλήθος τους – αυτό περιλαμβάνει και την περίπτωση $n=0$, δηλαδή την περίπτωση που ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Θεωρούμε μια αρίθμηση $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ του X τέτοια ώστε τα n πρώτα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ να είναι τα μεμονωμένα σημεία του.

Αυτό σημαίνει ότι τα $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ είναι σημεία συσσώρευσης του X.

Παρατηρούμε τώρα το εξής: Αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του X, τότε το σύνολο $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό στον X. Πράγματι, αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης, για κάθε $\varepsilon > 0$, το $B(x, \varepsilon)$ περιέχει σημεία διαφορετικά του X, το οποίο σημαίνει ότι $\{x\}^\circ = \emptyset$. Έπεται ότι $\overline{X \setminus \{x\}} = X \setminus \{x\}^\circ = X$, δηλαδή το $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό.

Επεται ότι, για κάθε $k=1,2,\dots$, το σύνολο
$G_k = X \setminus \{x_{n+k}\}$ είναι πυκνό στον X και
είναι και ανοικτό, αφού κάθε μονοσύνολο $\{x_{n+k}\}$
είναι κλειστό.
Αφού ο X είναι πλήρης, από το Θεώρημα
του Baire παίρνουμε ότι το σύνολο
$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ είναι πυκνό στον X.

Όμως $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \setminus \{x_{n+k}\}) = X \setminus \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$

δηλαδή $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Όμως κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστό,
άρα $\overline{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq X$, άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι ο X έχει άπειρο πλήθος μεμονωμένων σημείων.

(β) Χρησιμοποιούμε τη 2η μορφή του Θεωρήματος του Baire. Εστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών.
Γράφουμε

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y \in Y : f(y) = q_k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\{q_k\}).$$

Αφού η f είναι συνεχής και κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό σύνολο, έπεται ότι, για κάθε $k=1,2,\dots$, το $f^{-1}(\{q_k\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.
Αφού ο Y είναι πλήρης, από τη 2η μορφή του Θεωρήματος του Baire παίρνουμε ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ με $\left[f^{-1}(\{q_{k_0}\})\right]^{o} \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $G \neq \emptyset$ ανοικτό υποσύνολο του Y με $f(y) = q_{k_0}$ για κάθε $y \in G$.
($G \subseteq f^{-1}(\{q_{k_0}\})$, δηλαδή)