Πραγματική Ανάλυση

2η Ενδιάμεση Εξέταση

22 - 5 - 2021

Θέμα 1ο.

Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ως μετρικούς χώρους με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

(α) Αποδείξτε ότι, για οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, ρ), κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$ με $g(\frac{1}{n}) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής 1-1 συνάρτηση από το B στο $\mathbb{N}$.

Θέμα 2ο.

(α) Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη μετρική ρ ως εξής: $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης.

(β) Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, σ) για τους οποίους ισχύει το εξής: Υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ 1-1, επί και τέτοια ώστε η f και η f^{-1} να είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης αν και μόνο αν ο (Y, σ) είναι πλήρης.

Θέμα 3ο.

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, αποδείξτε ότι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(β) Έστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\mathbb{Q}_n = \{q_k \mid k \geq n\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 4ο.

(α) Έστω X ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και d μια μετρική στο X ώστε ο χώρος (X, d) να είναι πλήρης. Αποδείξτε ότι ο (X, d) έχει άπειρο πλήθος μεμονωμένων σημείων.

(β) Έστω (Y, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : Y \to \mathbb{Q}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα ανοικτό μη κενό υποσύνολο G του Y πάνω στο οποίο η f είναι σταθερή.