Πραγματική Ανάλυση
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ως μετρικούς χώρους με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.
(α) Δείξτε ότι οι χώροι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και $(A, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί.
(β) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, αλλά ο $(A, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης.

2. Υποθέτουμε ότι οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, d) είναι ομοιομορφικοί. Αν ο (X, d) είναι πλήρης, αποδείξτε ότι ο (Y, d) ικανοποιεί το Θεώρημα του Baire: Αν (G_n) είναι μια ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του Y, τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό στον Y.

3. Δίνεται ένας μετρικός χώρος (X, d). Ορίζουμε τη μετρική ρ στο σύνολο X ως εξής: $\rho(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ $\forall x, y \in X$. Έχουμε δει ότι οι μετρικές d και ρ είναι ισοδύναμες. Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης αν και μόνο αν ο (X, ρ) είναι πλήρης. (Θυμηθείτε ότι αυτό δεν είναι γενικά σωστό για δύο ισοδύναμες μετρικές d_1, d_2.)

4. Δίνονται τα κλειστά διαστήματα $I = [0, 1]$ και $J = [2, 3]$. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης Urysohn που διαχωρίζει τα I, J και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το D είναι πυκνό στον X.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ $\forall x \in D$, ισχύει $f \equiv 0$.

6. (α) Αποδείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης αν και μόνο αν, για κάθε $x \in X$, η κλειστή μπάλα $\hat{B}(x, 1)$ είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.
(β) Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα $(X, ||\cdot||)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα του

$$\hat{B}(0, 1) = \{x \in X \ : \ ||x|| \leq 1\}$$

είναι πλήρης μετρικός χώρος με τον περιορισμό της μετρικής του X.

7. Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και Y ένας γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D = X \setminus Y$ είναι πυκνό στον X. (*Υπόδειξη* : Δείξτε ότι $Y^{\circ} = \emptyset$.)

8. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b] \subset (0, +\infty)$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $y \in [a, b]$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(ny) = 0$.
(α) Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Baire για να αποδείξετε ότι υπάρχουν $(c, d) \subset [a, b]$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, για κάθε $y \in (c, d)$ και κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|f(ny)| < \varepsilon$.
(β) Χρησιμοποιώντας το (α), αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.