<u>Πρόταση</u>. Ο χώρος $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών με τη μετρική που επάγεται από τη supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι πλήρης.

Με άλλα λόγια, ο $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.*

<u>Απόδειξη</u>

Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ_∞ με $x_n = (x_n(1), x_n(2), x_n(3), \dots)$.

Όπως ξέρουμε, αφού η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy θα είναι και φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ με $\boxed{\|x_n\|_\infty \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$ (1)

Θα δείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει σε ένα $x \in \ell_\infty$. Το όριο $x = (x(i))$ θα το βρούμε «κατά συντεταγμένη»:

<u>Βήμα 1ο:</u> Δείχνουμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy «κατά συντεταγμένη», δηλαδή ότι, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ ακολουθία $\left(x_n(i)\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy.

Πράγματι: έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι Cauchy στον ℓ_∞, έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n, m \geq n_0$ να ισχύει $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$.

Σταθεροποιούμε ένα τυχόν $i \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε

$$|x_n(i) - x_m(i)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\left(x_n(i)\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy

και, αφού το $i \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόν, αυτό ισχύει για κάθε συντεταγμένη i.

Βήμα 2ο

Για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, έχουμε ότι η πραγματική ακολουθία $(x_n(i))_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, επομένως συγκλίνει σε ένα $x(i) \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, παίρνοντας σύγκλιση κατά μήκος των στηλών του παρακάτω (άπειρου) πίνακα, βρίσκουμε την ακολουθία $x = (x(1), x(2), x(3), \ldots)$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & (x_1(1), & x_1(2), & x_1(3), & \ldots &) \\
x_2 & = & (x_2(1), & x_2(2), & x_2(3), & \ldots &) \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
x_n & = & (x_n(1), & x_n(2), & x_n(3), & \ldots &) \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
x & = & (x(1), & x(2), & x(3), & \ldots &)
\end{array}
$$

Μένει να δείξουμε ότι $x \in \ell_\infty$ και ότι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$.

Βήμα 3ο

Δείχνουμε ότι $x \in \ell_\infty$, ειδικότερα $|x(i)| \leq M \ \forall i$.

Από την (1) έχουμε: $\forall i : |x_n(i)| \leq \|x_n\|_\infty \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σταθεροποιώντας το i, έχουμε ότι $|x(i)| = \lim_{n\to\infty} |x_n(i)| \leq M$.

Έπεται ότι $|x(i)| \leq M$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$

Άρα $x \in \ell_\infty$.

Βήμα 4ο

Δείχνουμε ότι $\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού η (x_n) είναι $\|\cdot\|_\infty$ - Cauchy, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$.

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, έχουμε

$$|x_n(i) - x_m(i)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon, \text{ για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Σταθεροποιώντας το $i \in \mathbb{N}$ και το $n \geq n_0$ και παίρνοντας $m \to \infty$, έχουμε

$$|x_n(i) - x(i)| = \lim_{m\to\infty} |x_n(i) - x_m(i)| \leq \varepsilon.$$

Αφού η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $i \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $\|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$.
Συμπεραίνουμε ότι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

* Παρατήρηση 1. Για οποιοδήποτε μη κενό σύνολο Γ συμβολίζουμε με $\ell_\infty(\Gamma)$ το διανυσματικό χώρο των φραγμένων συναρτήσεων $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ (πράξεις: κατά σημείο), ο οποίος γίνεται χώρος με νόρμα, θέτοντας

$$\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \,\}.$$

Ο $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ είναι μία ειδική περίπτωση τέτοιου χώρου. Με την ίδια ακριβώς απόδειξη πού είδαμε για την περίπτωση του $\ell_\infty(\mathbb{N})$ αποδεικνύεται ότι, για κάθε $\Gamma \neq \emptyset$, ο $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι χώρος Banach, δηλαδή πλήρης μετρικός χώρος.

Παρατήρηση 2. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι, για οποιοδήποτε p με $1 \leq p < \infty$, ο $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ είναι χώρος Banach. (Άσκηση)

Για να δείξουμε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach θα χρησιμοποιήσουμε την επόμενη Πρόταση, η οποία έχει και ανεξάρτητο ενδιαφέρον, καθώς είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

<u>Πρόταση.</u> Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(b) Ο μετρικός χώρος F με τον περιορισμό της μετρικής ρ είναι πλήρης.

<u>Απόδειξη</u>

(a) $\Rightarrow$ (b) Υποθέτουμε ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. Έστω (x_n) μια ακολουθία Cauchy στο F. Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ με $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
Αφού όμως η ακολουθία (x_n) περιέχεται στο F και το F είναι κλειστό, παίρνουμε $x \in F$.
Συμπεραίνουμε ότι ο F είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(b) $\Rightarrow$ (a) Υποθέτουμε ότι ο F ως υπόχωρος του X είναι πλήρης. Υποθέτουμε ότι το F δεν είναι κλειστό υποσύνολο του X και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού το F δεν είναι κλειστό, υπάρχει $x \in X \setminus F$ και ακολουθία (x_n) στο F με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (αρκεί το x να είναι ένα σημείο συσσώρευσης του F που δεν ανήκει στο F). Τότε η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy (με τη μετρική ρ), οπότε, θεωρούμενη ως ακολουθία στο μετρικό χώρο F, είναι μια Cauchy ακολουθία που δεν συγκλίνει. Αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση ότι ο F είναι πλήρης.
Συμπεραίνουμε ότι το F είναι κλειστό.

<u>Παραδείγματα</u> Το κλειστό διάστημα $Y = [0, 1]$ ως υπόχωρος του $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, ενώ το $Z = (0, 1]$ δεν είναι. Βρείτε μια ακολουθία Cauchy στον Z η οποία δεν συγκλίνει (στον Z).

<u>Πρόταση</u> Ο χώρος c_0 των πραγματικών ακολουθιών που τείνουν στο 0, με μετρική την επαγόμενη από τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, είναι πλήρης μετρικός χώρος.

<u>Απόδειξη</u>

Από τον ορισμό του, ο c_0 είναι υπόχωρος του ℓ_∞, αφού $c_0 \subseteq \ell_\infty$ και η μετρική που θεωρούμε στο c_0 είναι ο περιορισμός της μετρικής του ℓ_∞. Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο c_0 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

Έστω (x_n) μια ακολουθία στοιχείων του c_0 με $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$, δηλαδή $\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Θα δείξουμε ότι $x \in c_0$.

Έστω $\forall n$ $x_n = (x_n(1), x_n(2), \dots)$

και $x = (x(1), x(2), \dots)$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{i\to\infty} x(i) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\|x_n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|x_n(i) - x(i)| \leq \|x_n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Ειδικότερα, για το n_0, ισχύει: (1) $\boxed{|x_{n_0}(i) - x(i)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \in \mathbb{N}.}$

Αφού $\lim_{i\to\infty} x_{n_0}(i) = 0$, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε (2) $\boxed{\text{για κάθε } i \geq i_0 \text{ να ισχύει } |x_{n_0}(i)| < \frac{\varepsilon}{2}}$

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $i \geq i_0$ είναι:

$$|x(i)| \leq |x(i) - x_{n_0}(i)| + |x_{n_0}(i)| \underset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{i\to\infty} x(i) = 0$, δηλαδή $x \in c_0$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Παρατήρηση</u> Έστω c_{00} ο διανυσματικός χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών με μετρική τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Έχουμε δει (σε άσκηση) ότι ο $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης. Χρησιμοποιώντας τα νέα μας εργαλεία, μπορούμε να ξαναδούμε αυτή την απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞, αρκεί δηλαδή να βρούμε μια ακολουθία (x_n) στον c_{00}, η οποία συγκλίνει σε ένα $x \in \ell_\infty \setminus c_{00}$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) με

$$x_n = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και το

$$x = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\right), \quad \text{δηλαδή} \quad x(k) = \tfrac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

αποτελούν ένα τέτοιο παράδειγμα.

<u>Άσκηση 4</u> Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι: Αν κάθε βασική ακολουθία (d_n) στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε ο X είναι πλήρης.

<u>Απόδειξη</u>
Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Αφού το σύνολο D είναι πυκνό στον X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε $d_n \in D$ με $\rho(x_n, d_n) < \frac{1}{n}$. Εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία (d_n) είναι επίσης Cauchy. Πράγματι· έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geq n_1$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επιλέγουμε $n_0 \geq n_1$ για το οποίο ισχύει $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$. Τότε, για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$\rho(d_n, d_m) \leq \rho(d_n, x_n) + \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, d_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η (d_n) είναι ακολουθία Cauchy στο D και από την υπόθεσή μας παίρνουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $\lim_{n\to\infty} d_n = x$.
Από τη σχέση
$$\rho(x_n, x) \le \rho(x_n, d_n) + \rho(d_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(d_n, x),$$
συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$, δηλαδή η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Άσκηση 10.</u> Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε αριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι ο X είναι πλήρης. Τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης υπόχωρος, άρα δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.
Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι κάθε αριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης υπόχωρος. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι ο X δεν είναι πλήρης. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X, η οποία είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει. Θέτουμε
$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
Τότε το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης:
Αν το x ήταν σημείο συσσώρευσης του A θα υπήρχε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$, αλλά τότε, αφού η (x_n) είναι Cauchy, θα ίσχυε και $x_n \to x$, άτοπο (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).
Επομένως το A είναι κλειστό. Αλλά το A δεν είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος, αφού περιέχει μια ακολουθία (τη (x_n)) η οποία είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει. Επίσης, προφανώς, το A είναι αριθμήσιμο, οπότε έχουμε καταλήξει σε άτοπο.
Άρα ο X είναι πλήρης.