1η Ενδιάμεση Εξέταση
Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα 1ο

Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή σε κάθε μετρικό χώρο (X, d). Αν αυτό ισχύει, αποδείξτε το, διαφορετικά δώστε αντιπαράδειγμα.

(1) Κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο έχει σημεία συσσώρευσης

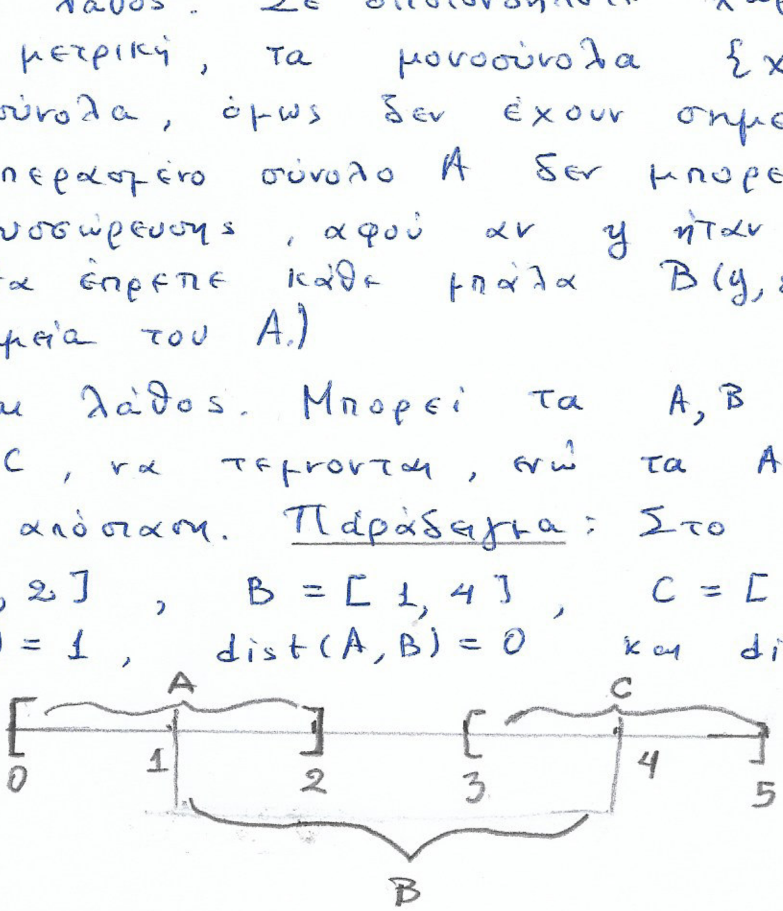
(2) Η απόσταση δύο (μη κενών) συνόλων,
$dist(A,B) = \inf\{ d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$
ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή ισχύει
$dist(A,C) \leq dist(A,B) + dist(B,C) \quad \forall A, B, C \subseteq X$, μη κενά.

(3) $(bd(A) \setminus A) \subseteq A'$, για κάθε $A \subseteq X$.

Απάντηση

(1) Είναι λάθος. Σε οποιονδήποτε χώρο με τη διακριτή μετρική, τα μονοσύνολα $\{x\}$ είναι ανοικτά σύνολα, όμως δεν έχουν σημεία συσσώρευσης (Ένα πεπερασμένο σύνολο A δεν μπορεί να έχει σημεία συσσώρευσης, αφού αν y ήταν ένα τέτοιο σημείο θα έπρεπε κάθε μπάλα $B(y, \varepsilon)$ να περιέχει άπειρα σημεία του A.)

(2) Είναι λάθος. Μπορεί τα A, B να τέμνονται, τα B, C να τέμνονται, ενώ τα A, C να απέχουν θετική απόσταση. <u>Παράδειγμα</u>: Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τα $A = [0, 2]$, $B = [1, 4]$, $C = [3, 5]$, οπότε $dist(A, C) = 1$, $dist(A, B) = 0$ και $dist(B, C) = 0$



(3) Είναι σωστή:

<u>1ος τρόπος</u>: Είναι $bd(A) \subseteq \bar{A}$, άρα $bd(A) \setminus A \subseteq \bar{A} \setminus A \subseteq A'$.

<u>2ος τρόπος</u>: Έστω $x \in bd(A)$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ ~~είναι~~ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Αν $x \notin A$, τότε κάθε $B(x, \varepsilon)$ περιέχει στοιχείο του A διαφορετικό του x. Άρα το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή $x \in A'$.

Θέμα 2ο

(α) Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

(1) Εξετάστε αν υπάρχει $A\subseteq\mathbb{R}$ με $A^\circ=\emptyset$ και $(\mathbb{R}\setminus A)^\circ=\emptyset$.

(2) Εξετάστε αν υπάρχει $B\subseteq\mathbb{R}$ με $B'=\emptyset$ και $(\mathbb{R}\setminus B)'=\emptyset$.

(β) Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική. Αν

$$A=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<x<\frac{1}{\pi} \text{ και } y=\sin\frac{1}{x} \right\},$$

βρείτε την κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A.

(γ) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι, αν $A,G\subseteq X$ και το G είναι ανοικτό, τότε

$$A\cap G\neq\emptyset \iff \overline{A}\cap G\neq\emptyset.$$

Απάντηση

(α) (1) Τέτοια σύνολα υπάρχουν. Παράδειγμα τέτοιου συνόλου είναι το $\mathbb{Q}$. Είναι $\mathbb{Q}^\circ=\emptyset$ και $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ=\emptyset$, αφού κανένα από τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα.

(2) Τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει: Αν $B'=\emptyset$, τότε το B είναι κλειστό, άρα το $\mathbb{R}\setminus B$ είναι ανοικτό. Έπεται ότι το $\mathbb{R}\setminus B$ περιέχει ένα διάστημα (a,b). Κάθε σημείο x του διαστήματος (a,b) είναι σημείο συσσώρευσης του (a,b) άρα και του $\mathbb{R}\setminus B$. Συμπεραίνουμε ότι $(\mathbb{R}\setminus B)'\neq\emptyset$.

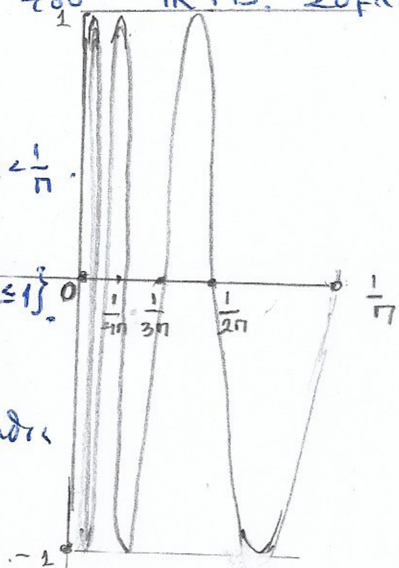
(β) Το σύνολο A είναι το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $0<x<\frac{1}{\pi}$.

Θα δείξουμε ότι

$$\overline{A}=A\cup\left\{\left(\tfrac{1}{\pi},0\right)\right\}\cup\{(0,t)\mid -1\le t\le 1\}.$$

Έχουμε: $(x,y)\in\overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\big((x_n,y_n)\big)$ από το A με

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x,y)$$



Αφού $(x_n,y_n)\in A$, είναι $0<x_n<\frac{1}{\pi}$ και $y_n=\sin\frac{1}{x_n}$.

Επίσης κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο $\mathbb{R}^2$, συγκλίνει κατά συντεταγμένη, άρα $x_n\longrightarrow x$ και $\sin\frac{1}{x_n}\to y$.

Συμπεραίνουμε ότι $0 \le x \le \frac{1}{\pi}$. Επιπλέον, αν $x \in (0, \frac{1}{\pi}]$, τότε από τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$, παίρνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \sin\frac{1}{x}$. Ειδικότερα, εκτός από τα σημεία του A, παίρνουμε και το σημείο $(\frac{1}{\pi}, \sin\pi) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ να ανήκει στην $\bar{A}$.

Μένει να βρούμε τα σημεία συσσώρευσης (x,y) του A που έχουν $x = 0$. Αφού $y_n \to y$ και $-1 \le y_n \le 1$, θα είναι και $-1 \le y \le 1$. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $y \in [-1, 1]$, υπάρχει ακολουθία (x_n), $x_n \in (0, \frac{1}{\pi})$, με $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = y$. Πράγματι, έστω $y \in [-1, 1]$. Υπάρχει $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ με $\sin\theta = y$. Θέτουμε $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{2n\pi + \theta}$, οπότε $0 < x_n < \frac{1}{\pi}$,

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ και $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta = y$.

Άρα $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, y)$.

Συμπεραίνουμε, συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα, ότι

$$\bar{A} = A \cup \{(0, y) \mid -1 \le y \le 1\} \cup \{(\tfrac{1}{\pi}, 0)\}.$$

(γ) Είναι $A \cap G \subseteq \bar{A} \cap G$, επομένως η κατεύθυνση $A \cap G \neq \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap G \neq \emptyset$ είναι τετριμμένη.
Για την αντίστροφη συνεπαγωγή έχουμε:

<u>1ος τρόπος</u>: Έστω $\bar{A} \cap G \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $x \in \bar{A} \cap G$. Αφού $x \in \bar{A}$, έχουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η $B(x, \varepsilon)$ περιέχει στοιχεία του A. Επιπλέον, αφού $x \in G$ και το G είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq G$. Από το προηγούμενο υπάρχει $a \in A$ με $a \in B(x, \delta)$. Άρα $a \in A \cap G$, δηλαδή $A \cap G \neq \emptyset$.

<u>2ος τρόπος</u>: Έστω $\bar{A} \cap G \neq \emptyset$. Αν ήταν $A \cap G = \emptyset$, τότε θα είχαμε $A \subseteq X \setminus G$. Αλλά το $X \setminus G$ είναι κλειστό και από τις ιδιότητες της κλειστής θήκης θα παίρναμε $\bar{A} \subseteq X \setminus G$, δηλαδή $\bar{A} \cap G = \emptyset$, άτοπο. Άρα $A \cap G \neq \emptyset$.

Θέμα 3ο

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Αποδείξτε ότι:

(i) Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy αλλά δεν συγκλίνει, τότε $A' = \emptyset$.

(ii) Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε είτε $A' = \emptyset$ είτε το A' είναι μονοσύνολο. Δώστε παράδειγμα για την κάθε περίπτωση.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (x_n) σε κατάλληλο υπόχωρο X του $\mathbb{R}$, η οποία είναι Cauchy, αλλά δεν συγκλίνει.

Απάντηση

(α) Οι αποδείξεις βασίζονται στον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Αν $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ και $x \in A'$, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού: Έστω $x \in A'$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $B(x, \varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο. Επαγωγικά κατασκευάζουμε την υπακολουθία (x_{k_n}) ως εξής: Για $n=1$ επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{k_1} \in B(x, 1)$. Έστω ότι τα $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ έχουν επιλεγεί ώστε $x_{k_i} \in B(x, \frac{1}{i})$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αφού το σύνολο $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$ είναι άπειρο, υπάρχει $k_{n+1} > k_n$ με $x_{k_{n+1}} \in B(x, \frac{1}{n+1})$. Είναι φανερό ότι η υπακολουθία (x_{k_n}) που κατασκευάζουμε με αυτόν τον τρόπο, συγκλίνει στο x.

Απόδειξη του (i): Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy, αλλά δεν συγκλίνει. Αν υπήρχε $x \in A'$, τότε, σύμφωνα με τον προηγούμενο Ισχυρισμό, θα υπήρχε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$.

Όμως, όπως ξέρουμε από τη θεωρία, αν μία βασική ακολουθία (x_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει, τότε και η ίδια η ακολουθία συγκλίνει στο ίδιο όριο. Άρα $x_n \to x$, άτοπο, αφού έχουμε υπόθεση ότι η (x_n) δεν συγκλίνει. Συμπεραίνουμε ότι $A' = \emptyset$.

(ii) Έστω ότι $x_n \to x$. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $y \neq x$, τότε το y δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Πράγματι, αν το y ήταν σημείο συσσώρευσης του A, τότε, όπως πριν, θα είχαμε ότι υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to y$, άτοπο, αφού κάθε υπακολουθία της (x_n) συγκλίνει στο x και $x \neq y$. Συμπεραίνουμε ότι $A' \subseteq \{x\}$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1:</u> Η ακολουθία (x_n) είναι τελικά σταθερή. Τότε το σύνολο A είναι πεπερασμένο, οπότε $A' = \emptyset$.

<u>Περίπτωση 2:</u> Η ακολουθία (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και βεβαίως $x_{k_n} \to x$ (αφού $x_n \to x$). Έπεται ότι $x \in A'$.

Ένα παράδειγμα για την 1η Περίπτωση είναι η πραγματική ακολουθία (x_n) με $x_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, όπου $A = \{1\}$ και $A' = \emptyset$. Ένα παράδειγμα για τη 2η Περίπτωση είναι η πραγματική ακολουθία $y_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ και $A' = \{0\}$.

(β) Θεωρούμε το σύνολο $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$. Τότε η ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι Cauchy, αλλά δεν συγκλίνει στον X.

Θέμα 4ο.

Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{U}_n = \bigcup_{x \in E} B(x, \tfrac{1}{n})$$

(a) Αν το E είναι φραγμένο, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\operatorname{diam}(\mathcal{U}_n) \leq \operatorname{diam}(E) + \frac{2}{n}.$$

(β) Για οποιοδήποτε μη κενό $E \subseteq X$, δείξτε ότι ισχύει

$$\overline{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n .$$

Απάντηση

(a) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Έστω $x', y' \in \mathcal{U}_n$. Τότε υπάρχουν $x, y \in E$ ώστε $x' \in B(x, \frac{1}{n})$ και $y' \in B(y, \frac{1}{n})$, δηλαδή $d(x,x') < \frac{1}{n}$ και $d(y,y') < \frac{1}{n}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$d(x',y') \leq d(x',x) + d(x,y) + d(y,y') < \frac{1}{n} + \operatorname{diam}(E) + \frac{1}{n}$$

Έπεται ότι:

$$\operatorname{diam}(\mathcal{U}_n) = \sup\{d(x',y') \mid x',y' \in \mathcal{U}_n\} \leq \operatorname{diam}(E) + \frac{2}{n}.$$

(β) Δείχνουμε πρώτα ότι $\overline{E} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$.

Έστω $z \in \overline{E}$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε $B(z, \frac{1}{n}) \cap E \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x \in E$ με $d(x,z) < \frac{1}{n}$, δηλαδή $z \in B(x, \frac{1}{n})$. Συμπεραίνουμε ότι $z \in \mathcal{U}_n$ και, αφού το $n \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόν, παίρνουμε $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$. Άρα $\overline{E} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$.

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \subseteq \overline{E}$.

Έστω $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$. Υποθέτουμε ότι $z \notin \overline{E}$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(z, \varepsilon) \cap E = \emptyset$, δηλαδή $d(z,x) \geq \varepsilon$ $\forall x \in E$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $x \in E$, $z \notin B(x, \frac{1}{n_0})$. Άρα $z \notin \mathcal{U}_{n_0}$, άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι $z \in \overline{E}$. Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \subseteq \overline{E}$.