Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

Κεφ. 2, Άσκηση 3

Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d). Θεωρούμε την ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων του X με

$$E_n = \{ x_k : k \geq n \} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

και την ακολουθία

$$t_n = \sup \{ d(x_k, x_n) : k \geq n \} \in [0, +\infty] \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η (x_n) είναι βασική

(β) $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) $t_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$

Απόδειξη

Υπενθυμίζουμε ότι, για κάθε $E \subseteq X$,

$$\operatorname{diam}(E) = \sup \{ d(x, y) : x, y \in E \} \quad , \text{ αν } E \neq \emptyset$$

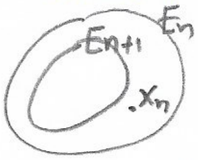
και $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή

(1) $\qquad A \subseteq B \implies \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία υποσυνόλων (E_n) είναι φθίνουσα, δηλαδή ισχύει

(2) $\qquad E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$



Έχουμε:

(α) $\Rightarrow$ (β) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική (Cauchy). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $\operatorname{diam}(E_{n_0}) = \sup \{ d(x_n, x_m) ; n, m \geq n_0 \} \leq \varepsilon$.

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\operatorname{diam}(E_n) \leq \operatorname{diam}(E_{n_0}) \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$.

(β) ⇒ (α) Υποθέτουμε ότι $diam(E_n) \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $diam(E_{n_0}) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική.

(β) ⟺ (γ). Παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύουν οι ανισότητες:

(3) $\quad 0 \leq t_n \leq diam(E_n) \leq 2t_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι:

$$\{d(x_k, x_n) : k \geq n\} \subseteq \{d(x_k, x_m) : k, m \geq n\}$$

$$\Rightarrow t_n = \sup\{d(x_k, x_n) : k \geq n\} \leq \sup\{d(x_k, x_m) : k, m \geq n\} = diam(E_n)$$

Άρα $t_n \leq diam(E_n)$.

Για την δεξιά ανισότητα, σταθεροποιούμε το n και παρατηρούμε ότι αν $k, m \geq n$, τότε $d(x_k, x_m) \leq d(x_k, x_n) + d(x_n, x_m) \leq 2t_n$

άρα $diam(E_n) = \sup\{d(x_k, x_m) : k, m \geq n\} \leq 2t_n$

Έπεται άμεσα από την (3) ότι:

$$diam(E_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad t_n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

δηλαδή ότι β ⟺ γ.

Κεφ. 2, Άσκηση 4

Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d) και έστω $x \in X$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η (x_n) συγκλίνει στο x τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x.

(β) Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.

Απόδειξη

(α) Από τον ορισμό της υπακολουθίας, έχουμε ότι, αν η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n), τότε οι δείκτες αυξάνουν, δηλαδή

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$$

Με βάση αυτό, αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι ισχύει $n \leq k_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η (x_n) συγκλίνει στο x και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x) < \varepsilon$. Άρα, αν $n \geq n_0$, τότε $k_n \geq n \geq n_0$, οπότε $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $x_{k_n} \to x$.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x. Έστω, προς άτοπο, ότι η (x_n) δεν συγκλίνει στο x. Θα βρούμε μία υπακολουθία της (x_n) η οποία βρίσκεται «μακριά» από το x:

Αφού η (x_n) δεν συγκλίνει στο x, υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, να υπάρχει $m_n \geq n$ με $d(x_{m_n}, x) \geq \varepsilon$.

Σταθεροποιούμε αυτό το ε και κατασκευάζουμε μία υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ως εξής:

Για $n=1$, επιλέγουμε $k_1 \geq 1$ με $d(x_{k_1}, x) \geq \varepsilon$.

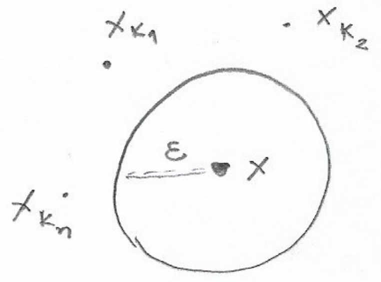
Για $n=2$, επιλέγουμε $k_2 \geq k_1+1$ με $d(x_{k_2}, x) \geq \varepsilon$.

Συνεχίζοντας έτσι, επαγωγικά επιλέγουμε

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$$

με $d(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η (x_{k_n}) δεν έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x, αφού κάθε όρος της απέχει τουλάχιστον ε από το x. Άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x.



Κεφ. 2, Άσκ. 5

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος

(α) Αν $x_0 \in X$ σταθερό, δείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi : X \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \rho(x, x_0)$ είναι συνεχής.

(β) Αν d είναι μια οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στον $X \times X$, δείξτε ότι η συνάρτηση $\rho : (X \times X, d) \to \mathbb{R}$ με $(x,y) \to \rho(x,y)$, είναι συνεχής.

Απόδειξη

(α) Χρησιμοποιούμε την αρχή της μεταφοράς. Έστω $x \in X$ και $x_n \to x$.

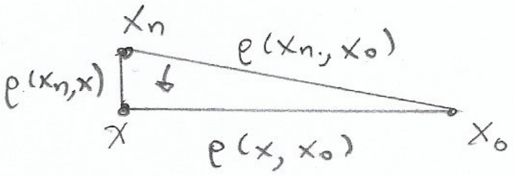
Θα δείξουμε ότι $\varphi(x_n) = \rho(x_n, x_0) \to \rho(x, x_0) = \varphi(x)$.

Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$|\rho(x_n, x_0) - \rho(x, x_0)| \leq \rho(x_n, x)$$

Αφού $\rho(x_n, x) \to 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(x_n, x_0) \longrightarrow \rho(x, x_0).$$



(β) Χρησιμοποιούμε πάλι την αρχή της μεταφοράς. Έστω $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (x,y) \in X \times X$.

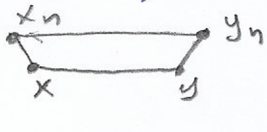
Αφού η d είναι μετρική γινόμενο, αυτό σημαίνει ότι $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} y$,

δηλαδή $\rho(x_n, x) \longrightarrow 0$ και $\rho(y_n, y) \to 0$

Με τη βοήθεια της ανισότητας*

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x,y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y),$$

συμπεραίνουμε ότι $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y)$.



*(ανισότητα 4 σημείων)

Κεφ. 2, Ασκηση 10

Εστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,d). Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν η ακολουθία

$$(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \ldots)$$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Η ακολουθία y_n ορίζεται ως: $y_n = \begin{cases} x_k, & \text{αν } n=2k-1 \\ x, & \text{αν } n=2k \end{cases}, k\in\mathbb{N}$

Εστω ότι η (x_n) συγκλίνει στο x. Εστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $d(x_k, x) < \varepsilon$.

Θέτουμε $n_0 = 2k_0 - 1$. Αν $n \geq n_0$, έχουμε

(i) αν n περιττός, τότε $n=2k-1$ με $k \geq k_0$, άρα $y_n = x_k$ με $k \geq k_0$, άρα $d(y_n,x)=d(x_k,x)<\varepsilon$.

(ii) αν n άρτιος, τότε $y_n = x$, άρα $d(y_n,x)=d(x,x)=0<\varepsilon$.

Συμπεραίνουμε ότι $y_n \to x$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η (y_n) συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$. Τότε και κάθε υπακολουθία της (y_n) θα συγκλίνει στο y. Ειδικότερα η (y_{2k}) θα συγκλίνει στο y. Όμως $y_{2k} = x$, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, δηλαδή $y_{2k}\to x$, άρα $y=x$. Συμπεραίνουμε ότι $y_n \to x$.

Τότε και η υπακολουθία (y_{2k-1}) της (y_n) θα συγκλίνει στο x και, αφού $y_{2k-1} = x_k$, $k\in\mathbb{N}$, παίρνουμε $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.

Κεφ. 2, Άσκηση 11

Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d). Υποθέτουμε ότι $x_n \to x \in X$. Δείξτε ότι, για κάθε μετάθεση (1-1 και επί συνάρτηση) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, η ακολουθία $y_n = x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Το σύνολο

$$\{ k \in \mathbb{N} : 1 \leq \sigma(k) \leq n_0 \} = \sigma^{-1}(\{1, 2, \ldots, n_0\})$$

είναι πεπερασμένο – έχει n_0 στοιχεία.

Έστω $k_0 = \max \{ k \in \mathbb{N} : 1 \leq \sigma(k) \leq n_0 \}$

Τότε, αν $k \geq k_0 + 1$, έχουμε

$$\sigma(k) > n_0$$

άρα $d(x_{\sigma(k)}, x) < \varepsilon$,

δηλαδή $d(y_k, x) < \varepsilon$.

Συμπεραίνουμε ότι $y_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x$.

Κεφ. 2, Άσκηση 13

Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση, αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < +\infty$$

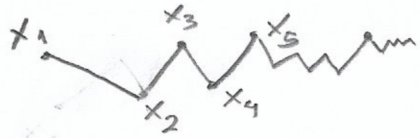
Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση, τότε είναι βασική, άρα και φραγμένη. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Αν η (x_n) είναι βασική, τότε έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.

(γ) Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.

Απόδειξη



(α) Υποθέτουμε ότι η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το κριτήριο Cauchy για τη σύγκλιση σειρών, έχουμε ότι, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $n_0 \leq m < n$, να ισχύει

$$\sum_{k=m}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι, αν $n_0 \leq m < n$, τότε

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n)$$

$$\Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$, η οποία συγκλίνει, άρα είναι Cauchy, αλλά η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$$

αποκλίνει.

Αρκεί να πάρουμε μία ακολουθία (a_k) η οποία είναι αθροίσιμη, αλλά όχι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ να συγκλίνει, αλλά η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ να αποκλίνει (για παράδειγμα, $a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$) και να θέσουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Τότε η (x_n) είναι Cauchy, αφού

$$x_n \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k , \qquad \text{αλλά}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| = +\infty .$$

(β) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική. Μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε μία υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με την ιδιότητα:

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Η κατασκευή της (x_{k_n}) γίνεται επαγωγικά:

Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq k_1$ να ισχύει $\rho(x_m, x_{k_1}) < \frac{1}{2}$.

Για $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε για κάθε $m \geq k_2$ να ισχύει $\rho(x_m, x_{k_2}) < \frac{1}{2^2}$.
Παρατηρείστε ότι $\rho(x_{k_2}, x_{k_1}) < \frac{1}{2}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά:

Αν τα $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ έχουν επιλεγεί, επιλέγουμε $k_n > k_{n-1}$ τέτοιο ώστε:

για κάθε $m \geq k_n$ να ισχύει $\rho(x_m, x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$.

Από την επιλογή των k_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι φανερό ότι, για κάθε n: $\rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$.

Έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n})$ συγκλίνει (κριτήριο σύγκρισης), δηλαδή η υπακολουθία (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση.

(γ) Υποθέτουμε ότι η (x_n) έχει μία βασική υπακολουθία (x_{k_n}). Από το (β) παίρνουμε ότι η (x_{k_n}) θα έχει μία υπακολουθία $(x_{k_{\ell_n}})$ — που είναι και υπακολουθία της αρχικής (x_n) — η οποία έχει φραγμένη κύμανση.

Αντίστροφα, αν η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία έχει φραγμένη κύμανση, τότε η ίδια η (x_{k_n}) είναι βασική, όπως δείξαμε στο (α).

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι:

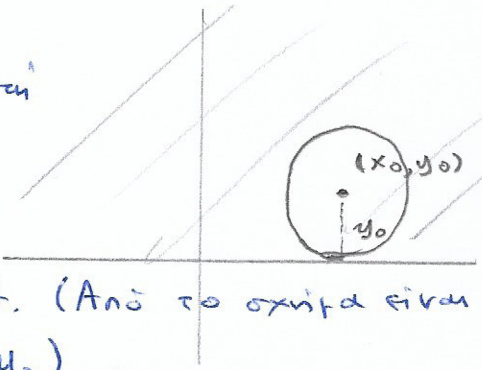
(α) Το σύνολο $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

(β) Σε κάθε μετρικό χώρο (X, d), κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ και κάθε σφαίρα $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ είναι κλειστά σύνολα.

Απόδειξη

(α) 1η απόδειξη: Με τον ορισμό: Έστω $u_0 = (x_0, y_0) \in G$. Τότε $y_0 > 0$.

Θα δείξουμε ότι η ανοικτή μπάλα $B(u_0, y_0)$ (με κέντρο $u_0 = (x_0, y_0)$ και ακτίνα y_0) περιέχεται στο G. (Από το σχήμα είναι φανερό)



Έστω $u = (x, y) \in B(u_0, y_0)$.

Τότε $d_2(u, u_0) < y_0$, δηλαδή $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < y_0$

δηλαδή $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < y_0^2$, άρα $(y-y_0)^2 < y_0^2$,

δηλαδή $|y - y_0| < y_0$.

Έπεται ότι $y_0 - y < y_0$ και τελικά,

$0 < y$.

Συμπεραίνουμε ότι $u = (x, y) \in G$ και τελικά, $B(u_0, y_0) \subseteq G$.

(α) <u>2η απόδειξη:</u> Δείχνουμε ότι το συμπλήρωμα

$$G^c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0 \}$$

είναι κλειστό, χρησιμοποιώντας το χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων μέσω συγκλινουσών ακολουθιών.

Έστω $((x_n, y_n))$ ακολουθία στο G^c με $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $(x,y) \in G^c$, δηλαδή ότι $y \leq 0$.

Αφού $(x_n, y_n) \xrightarrow[d_2]{} (x,y)$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ και $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Αφού, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι $y_n \leq 0$, παίρνουμε ότι και $y = \lim\limits_{n} y_n \leq 0$.

Άρα $(x,y) \in G^c$.

(β) • Για να δείξουμε ότι η $\hat{B}(x_0, r)$ είναι κλειστό σύνολο, αρκεί

<u>1η απόδειξη:</u> Να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά της $X \setminus \hat{B}(x_0, r)$ είναι ανοικτό — Το κάναμε στην τάξη.

<u>2η απόδειξη:</u> Να δείξουμε απευθείας ότι είναι κλειστό χρησιμοποιώντας το χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων μέσω συγκλινουσών ακολουθιών:

Έστω (x_n) ακολουθία σημείων της $\hat{B}(x_0, r)$ με $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$.

Έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_0) \leq r$.
Επίσης, αφού $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, έχουμε

$$d(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x, x_0)$$

Συμπεραίνουμε (από τις ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών) ότι

$$d(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) \leq r.$$

Άρα $x \in \hat{B}(x_0, r)$.

• Για να δείξουμε ότι η $S(x_0, r)$ είναι κλειστό σύνολο:

<u>1ος τρόπος</u>: Με ακολουθίες: Αν (x_n) ακολουθία στην $S(x_0,r)$ με $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, τότε $d(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x, x_0)$.

Αλλά $d(x_n, x_0) = r \quad \forall n$ (σταθερή ακολουθία).

Άρα $d(x, x_0) = r$, δηλαδή $x \in S(x_0, r)$.

<u>2ος Τρόπος</u>: Χρησιμοποιώντας ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο:

Είναι

$$S(x_0, r) = \hat{B}(x_0, r) \setminus B(x_0, r) = \hat{B}(x_0, r) \cap (B(x_0, r))^c$$

και, αφού τα $\hat{B}(x_0, r)$, $(B(x_0, r))^c$ είναι κλειστά, συμπεραίνουμε ότι και η σφαίρα $S(x_0, r)$ είναι κλειστό σύνολο.

Τα προηγούμενα είναι ειδικές περιπτώσεις της ακόλουθης γενικής και πολύ σημαντικής άσκησης:

Άσκηση 2

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.
Για κάθε $c \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι:

(α) Το σύνολο
$$A_c = \{ x \in X : f(x) = c \}$$
είναι κλειστό

(β) Το σύνολο
$$B_c = \{ x \in X : f(x) \leq c \}$$
είναι κλειστό

(γ) Το σύνολο
$$\Delta_c = \{ x \in X : f(x) < c \}$$
είναι ανοικτό.