$A \subseteq X$ $\quad x \in X$ λέγεται σημείο επαφής του A, αν $\forall \varepsilon > 0$

$$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Άμεσα: Αν $x \in A$ τότε x σημείο επαφής του A, αφού

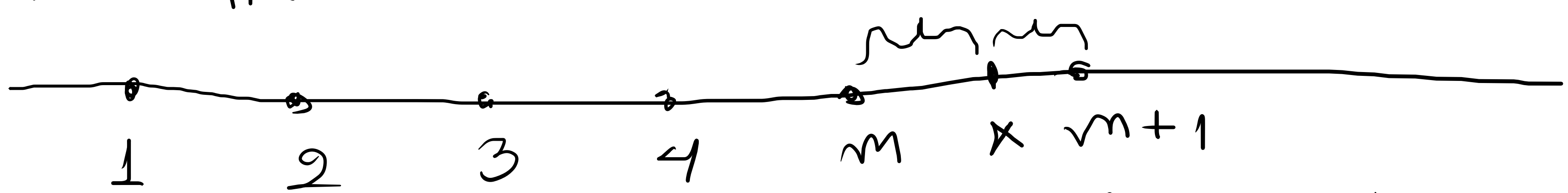
$$B(x,\varepsilon) \cap A \supseteq \{x\}$$

$$A \subseteq \overline{A}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{N}}$$

Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, έστω $m \in \mathbb{N}$

$m < x < m+1$

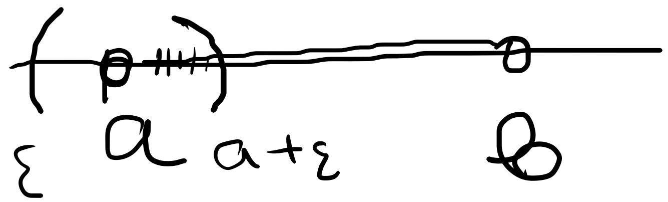


$\overline{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ $\quad \delta = \min\{x-m, (m+1)-x\} > 0$, τότε $(x-\delta, x+\delta) \cap \mathbb{N} = \emptyset$

Άρα $x \notin \overline{\mathbb{N}}$.

$\bar{A} = A \cup A'$

(a, b) a, b σημεία επαφής



A κλειστό

$\Longleftrightarrow \bar{A} = A$

$A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ Αν $x_n \to x$

τότε x σημείο επαφής του A.

και $\bar{A} = \{x\} \cup A$.

$$\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x_0, \varepsilon)$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$.

Τότε υπάρχει (x_n) με $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ $\forall n$ ώστε $x_n \to x$.

Είναι $d(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

και $d(x_n, x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} d(x, x_0)$

Τότε $d(x, x_0) \leq \varepsilon \Rightarrow x \in \hat{B}(x_0, \varepsilon)$

Δεν ισχύει πάντα ισότητα
Σε χώρο X με 2 τουλάχιστον
στοιχεία και με τη διακριτή
μετρική δ

$$B(x_0, 1) = \{x_0\}$$

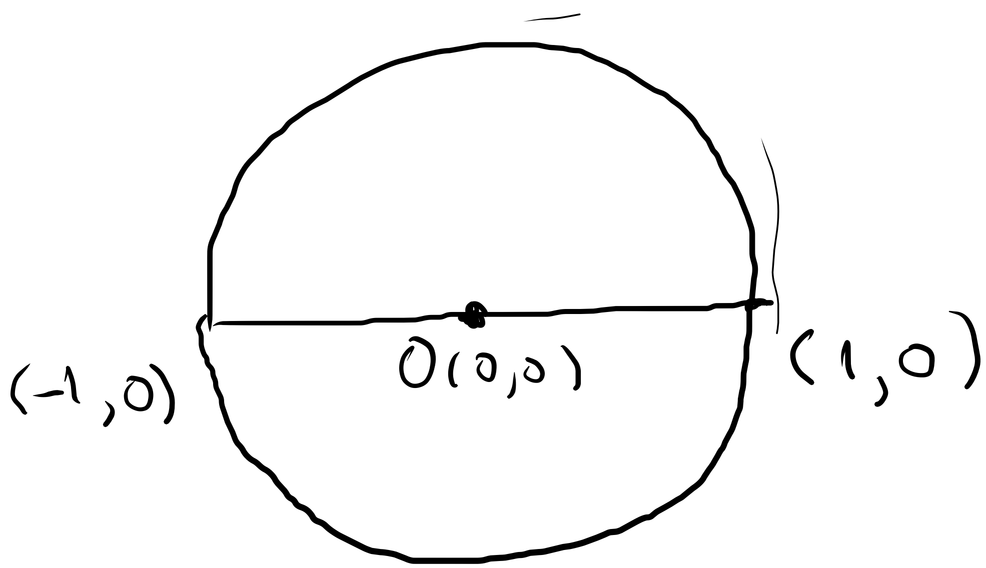
$$\Rightarrow \overline{B(x_0, 1)} = \{x_0\}$$

Αλλά

$$\hat{B}(x_0, 1) = \{x \in X : \delta(x, x_0) \leq 1\}$$
$$= X \supsetneq \{x_0\}$$

2ο Παράδειγμα

$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1$ ή $(y=0$ και $-1 \le x \le 1) \}$



Έστω $B_X(0,1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, \ -1 < x < 1 \}$

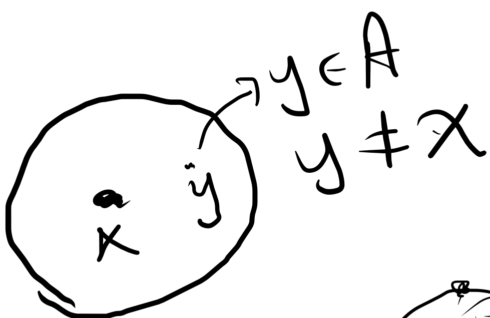
$\overline{B_X(0,1)} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, \ -1 \le x \le 1 \}$

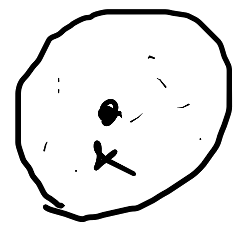
$\hat{B}(0,1) = X$

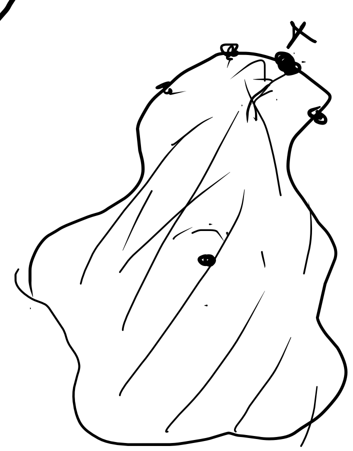
Σημείο συσσώρευσης συνόλου A

x σ.σ. του A

Σε κάθε $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A







clopen σύνολα

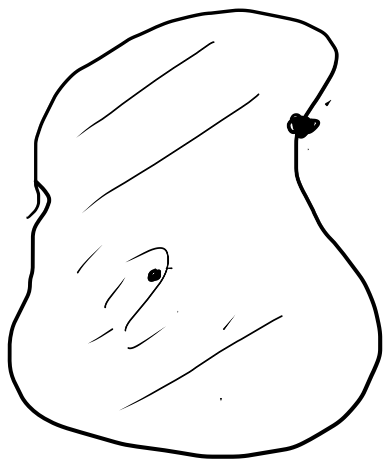
$X = \mathbb{N}$ τότε κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι clopen.

$X = [0,1] \cup [2,3]$

Το $[0,1] \subseteq X$ clopen

$[2,3]$ »

$\mathbb{R}^2$



$A = \{$

$\mathbb{Q} \leftarrow$ κανένα εσωτερικό σημείο

Αλλά κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης

$X = \mathbb{N}$

$A = \{1, 2, 3\}$

κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A.

$$B_{\mathbb{N}}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left\{ n \in \mathbb{N} : |n-1| < \frac{1}{2} \right\} = \{1\} \subseteq A$$

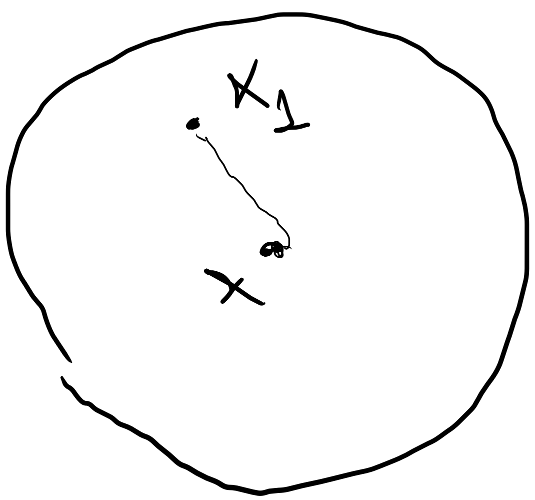
Ασκηση

Αν x σημείο συσσώρευσης του A, βρείτε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x$ και $\forall n \neq m$ $x_n \neq x_m$.

($\forall \varepsilon > 0$ υπαρχει $y \in B(x,\varepsilon) \cap A$ και $y \neq x$.)

Επαγωγική κατασκευή

Για $\varepsilon = 1$ υπαρχει $x_1 \in B(x,1) \cap A$ και $x_1 \neq x$.



2ο βήμα: $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, d(x_1,x)\}$ και βρίσκω $x_2 \in B(x,\varepsilon_2) \cap A$ οπότε $d(x_2,x) < \frac{1}{2}$ και $x_2 \neq x_1$