$c_{00} = \{ x = (x(i))_{i=1}^{\infty} : \forall i \ x(i) \in \mathbb{R}$ και $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\, i \geq i_0 + 1 \quad x(i) = 0 \}$

= σύνολο τελικά μηδενικών ακολουθιών

Θεωρούμε στον c_{00} την ακολουθία:

$x_1 = (1, 0, 0, \ldots)$

$x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \ldots)$

$x_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots)$

$\vdots$

$x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$

Τότε (α) η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (με την d_∞ μετρική στον c_{00}) είναι Cauchy.

$n > m$

$$d_\infty(x_n, x_m) = \| x_n - x_m \|_\infty$$

$$x_n - x_m = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, \underbrace{\frac{1}{m+1}, \dots, \frac{1}{n}}, 0, 0\right) - \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0 \dots\right)$$

$$= \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0 \dots\right)$$

$$\Rightarrow d_\infty(x_n, x_m) = \max\left\{\frac{1}{m+1}, \dots, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{m+1}$$

· Έστω $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Αν n, m με $n > m \geq n_0$, τότε

$$d_\infty(x_n, x_m) = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Άρα η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

(β) Δείχνουμε ότι η (x_n) δεν συγκλίνει.

Υποθέτω, προς άτοπο, ότι υπάρχει

$$x = (x(1), x(2), x(3), \dots) \in c_{00}$$

με $\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Αφού $x \in c_{00}$, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$\forall\, i \geq i_0+1 \quad x(i) = 0$.

Αν $n \geq i_0+1$, τότε

$$x_n - x = \left(1 - x(1), \frac{1}{2} - x(2), \dots, \frac{1}{i_0} - x(i_0), \frac{1}{i_0+1}, \frac{1}{i_0+2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

$\|x_n - x\|_\infty \geq \dfrac{1}{i_0+1}$ ← θετική σταθερά.

Άρα $\|x_n - x\|_\infty \not\to 0$, άτοπο.

Ασκηση 9, Κεφ. 2

Εστω $p \geq 1$, θεωρώ τον ℓ_p

Εστω $x \in \ell_p$

$x = (x(1), x(2), x(3), \dots,)$

με $\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p < +\infty$

Θεωρώ την ακολουθία των αρχικών τμημάτων της x:

$x_1 = (x(1), 0, 0, 0, \dots)$

$x_2 = (x(1), x(2), 0, 0, \dots)$

$x_3 = (x(1), x(2), x(3), 0, 0, \dots)$

Τότε $x_n \xrightarrow{d_p} x$

δηλαδή $\underline{\|x_n - x\|_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$x - x_n = (\cancel{x(1)}, x(2), \dots, x(n), x(n+1), x(n+2), \dots, \dots) - (\cancel{x(1)}, \dots, x(n), 0, 0, 0, \dots)$$

$$= (\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{n}, x(n+1), x(n+2), \dots)$$

$$\|x - x_n\|_p = \Big(\underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p}_{\text{η ουρά της σειράς } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}\Big)^{1/p}$$

ο ουρές: $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$S_n \to S$$

$$\Rightarrow \quad S_n - S \to 0$$

$$S_n - S = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \to 0$$

Από Απ. 2

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία $t_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ των ουρών συγκλίνει στο 0:

Έστω $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, τότε

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$ όπου $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Άρα $S - S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, όμως

$S - S_n = t_n$, άρα $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Εδώ έχω $x=(x(i)) \in \ell_p$.

δηλαδή $\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p$ συγκλίνει

Άρα $t_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Εδώ έχω $x = (x(i)) \in \ell_p$.

δηλαδή $\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p$ συγκλίνει

Άρα $t_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Παράδειγμα

$X = \{1, 2, 3\}$ με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

Τότε το $\{1\}$ είναι ανοικτό.

Γιατί για $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$B\left(1, \tfrac{1}{2}\right) = \{x \in \{1,2,3\} : |x-1| < \tfrac{1}{2}\} = \{1\}$$

Άρα $B\left(1, \tfrac{1}{2}\right) \subseteq \{1\}$.

Άρα το $\{1\}$ είναι ανοικτό.

Παράδειγμα 2

Το $\mathbb{Q}$ στον μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό, γιατί π.χ. για το $0 \in \mathbb{Q}$, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, στο $B(0,\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ υπάρχουν άρρητοι. Άρα $B(0,\varepsilon) \not\subseteq \mathbb{Q}$.

Άσκηση

- Δείξτε ότι κάθε $B(x_0,r)$ είναι ανοικτό σύνολο.

- Το $X \setminus \hat{B}(x_0,r) = \{x\in X : d(x,x_0) > r\}$

είναι ανοικτό σύνολο