Κεφ. 1, Ασκ. 4

d μετρική στον X, $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

Η $f \circ d$ θα είναι μετρική αν η f είναι (i) αύξουσα

(ii) $f(t+s) \leq f(t) + f(s) \quad \forall t, s \geq 0$

Γιατί, τότε

$$(f \circ d)(x,y) = f(d(x,y)) \overset{(i)}{\leq} f(d(x,z) + d(z,y))$$
$$\overset{(ii)}{\leq} f(d(x,z)) + f(d(z,y))$$

Με βάση αυτό, προκύπτει ότι, αν d μετρική, τότε

(1) η d^{α} όπου $0 < \alpha < 1$ είναι μετρική.

(2) η $\dfrac{d}{1+d}$ είναι μετρική, αφού η f με $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ έχει τις (i) και (ii)

(3) $\min\{d, 1\}$

$$(x+y)^2 \geq x^2 + y^2$$

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$

Κεφ. 1 6)

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{ d(x,y) \mid x, y \in A \}$$

Ισχύει : A φραγμένο $\underset{\text{ορισμ.}}{\iff}$ $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

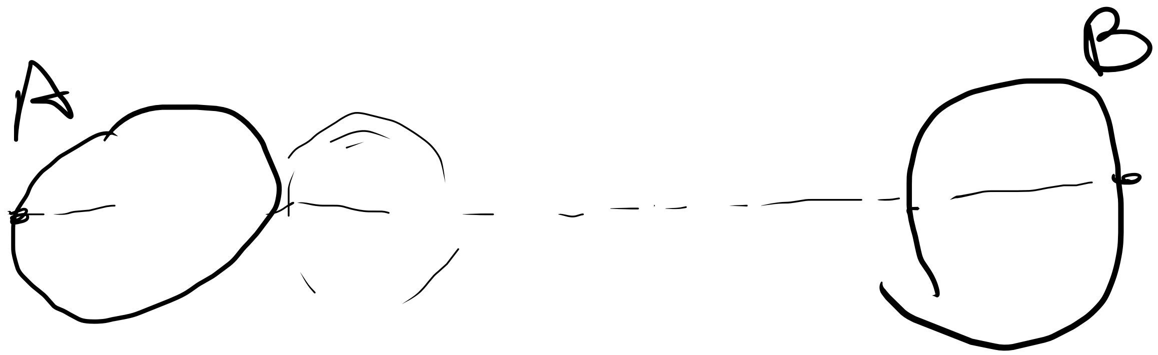
Σύμβαση : $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

- Αν $A \subseteq B$, τότε $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$

  αφού $\{ d(x,y) : x, y \in A \} \subseteq \{ d(x,y) : x, y \in B \}$

- Ισχύει η ανισότητα

  $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$?



Όχι, π.χ. στο $\mathbb{R}$

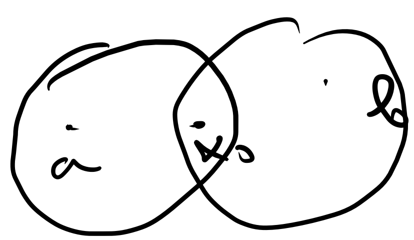
$A = [0, 1]$ $\qquad$ $B = [100, 101]$

οπότε $\quad diam(A) + diam(B) = 2$

ενώ $\quad diam(A \cup B) = |101 - 0| = 101$

Αν όμως $\quad A \cap B \neq \emptyset$, τότε ισχύει,

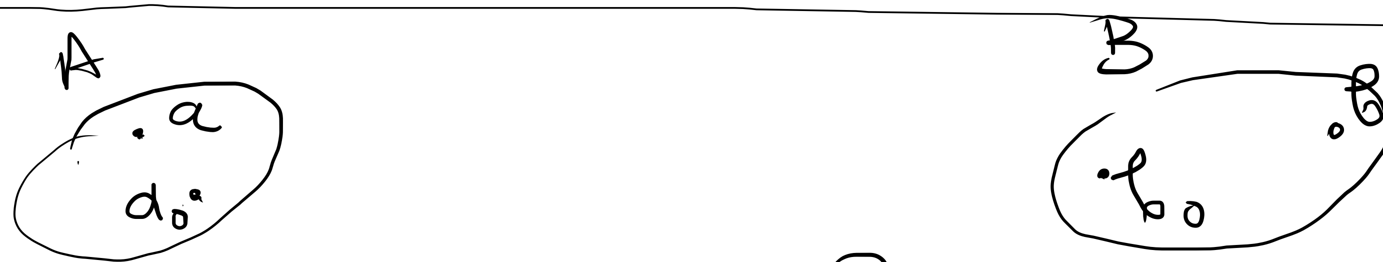
γιατί $\quad$ έστω $\quad x_0 \in A \cap B$, τότε



Για οποιαδήποτε $a \in A$, $b \in B$

$$d(a,b) \leq d(a, x_0) + d(x_0, b)$$
$$\leq diam(A) + diam(B)$$

Ασκ. 8 Αν A, B φραγμένα, τότε το $A \cup B$ φραγμένο.



Έστω $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Τότε

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(a_0, b_0)$$

γιατί, αν $a \in A$, $b \in B$, είναι

$$d(a,b) \leq d(a,a_0) + d(a_0,b_0) + d(b_0,b)$$

$$\leq \operatorname{diam}(A) + d(a_0,b_0) + \operatorname{diam}(B)$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(a_0,b_0)$$

Ασκ. 7

A φραγμένο $\iff \exists\, x_0 \in X$ και $r>0$

ώστε $A \subseteq B(x_0, r)$

Έστω A φραγμένο με $diam(A) = C > 0$

• Έστω $x_0 \in A$. Τότε, αν $x \in A$

$d(x, x_0) \leq C \implies x \in \hat{B}(x_0, C)$.

Άρα $A \subseteq \hat{B}(x_0, C)$.

• Αντίστροφα, έστω $A \subseteq B(x_0, r)$

Τότε $diam(A) \leq 2r$. γιατί αν

$x, y \in A$ τότε $x, y \in B(x_0, r)$, άρα

$d(x,y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2r$

$\implies diam(A) \leq 2r$.

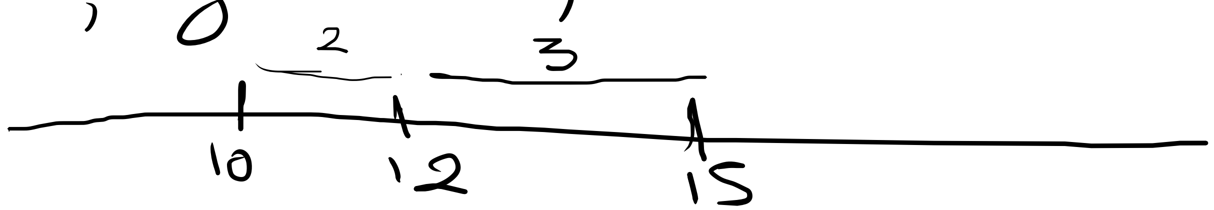
Στην Άσκ. 5

Η $\rho(x,y) = |x-y|^2$ δεν είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.

(Ο λόγος είναι ότι $(t+s)^2 \geq t^2+s^2$ επομένως η τριγωνική ανισότητα θα χαλάει)

Παράδειγμα:

$x = 10$, $y = 12$, $z = 15$



Είναι

$$\rho(15,10) = |15-10|^2 = 5^2 = 25$$

$$\rho(15,12) = |15-12|^2 = 3^2 = 9$$

$$\rho(12,10) = |12-10|^2 = 2^2 = 4$$

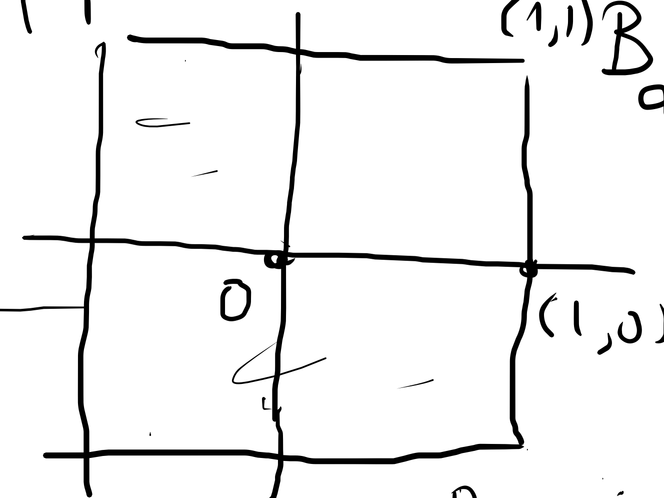
άρα $\rho(15,10) > \rho(15,12) + \rho(12,10)$ άρα όχι τριγωνική

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$

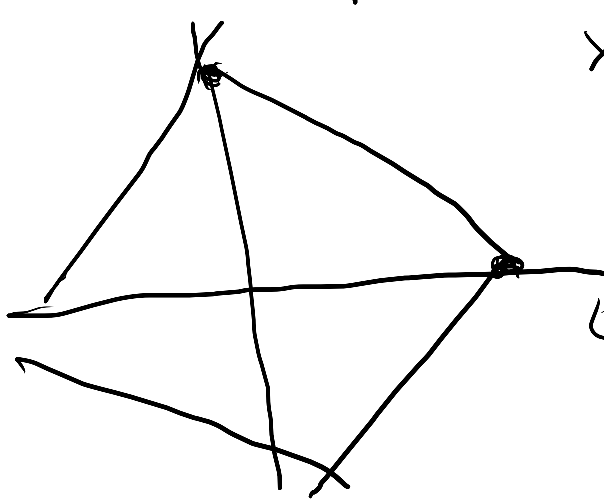
Οι μπάλες στον $\mathbb{R}^2$ με διάφορες p-νόρμες.

$p=\infty$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$



$\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$



$x, y \geq 0$

$x+y=1$

$\Leftrightarrow y = 1-x$

$\|(x,y)\|_p^p = |x|^p + |y|^p = 1$

Αν $x, y \geq 0$

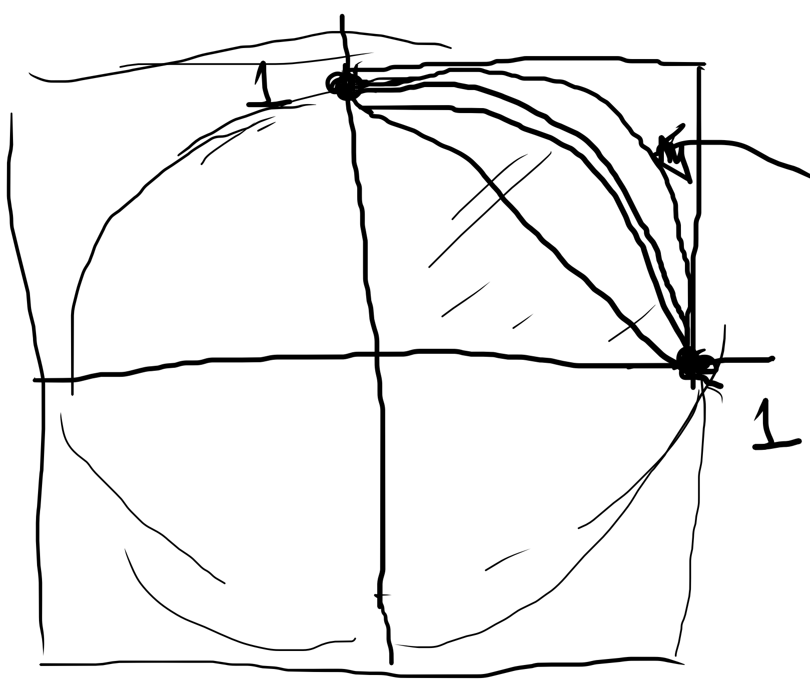
$y^p = 1-x^p$

$y = (1-x^p)^{1/p}$

π.χ. αν $p=3$

$\|(x,y)\|_3 = 1 \iff |x|^3+|y|^3 = 1$

Για $x,y \geq 0$ $\quad y = \sqrt[3]{1-x^3}$



$\forall\, p>1$

$\|x\|_p \leq \|x\|_1$

Άρα αν $\|x\|_1 \leq 1$

τότε $\|x\|_p \leq 1$

δηλαδή

$B_1(0,1) \subseteq B_p(0,1)$