

Πραγματική Ανάλυση (2015-16)

Ασκήσεις - Κεφάλαιο 1

Ομάδα Α'

1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση και ικανοποιεί την ανισότητα

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

για κάθε $x, y \in X$.

2. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(α) $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

(β) $|\rho(x, y) - \rho(z, w)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, w)$ για κάθε $x, y, z, w \in X$.

3. Στο \mathbb{R} θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\sigma(a, b) = \sqrt{|a - b|}$. Αποδείξτε ότι ο (\mathbb{R}, σ) είναι μετρικός χώρος.

Γενικότερα, δείξτε ότι: αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και αν θεωρήσουμε την $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sqrt{\|x - y\|}, \quad x, y \in X,$$

τότε ο (X, d) είναι μετρικός χώρος.

4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\rho_1 = \min\{d, 1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha = d^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) είναι μετρικές στο X .

5. Αν d_1, d_2 είναι μετρικές στο σύνολο X εξετάστε αν οι $d_1 + d_2$, $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$ είναι μετρικές στο X . Αν η d είναι μετρική στο X , είναι η d^2 μετρική στο X ;

6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της διαμέτρου:

(α) $\text{diam}(A) = 0$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή το A είναι μονοσύνολο (δηλαδή, $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$).

(β) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.

(γ) Αν $A, B \subseteq X$ τότε ισχύει η ανισότητα

$$\text{diam}(A \cap B) \leq \min\{\text{diam}(A), \text{diam}(B)\} \leq \max\{\text{diam}(A), \text{diam}(B)\} \leq \text{diam}(A \cup B).$$

Ισχύει η ανισότητα

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$$

για κάθε ζευγάρι υποσυνόλων A, B του X ;

(δ) Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X με $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, δείξτε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το πολύ μονοσύνολο (έχει το πολύ ένα στοιχείο).

7. Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, ρ) είναι φραγμένο αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a, x_0) \leq r$ για κάθε $a \in A$.

8. Έστω A_1, \dots, A_k φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ) . Δείξτε ότι το σύνολο $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ είναι επίσης φραγμένο.

Ομάδα Β'

9. (α) Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ αύξουσα συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι υποπροσθετική, δηλ. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \geq 0$. Δείξτε ότι: αν η d είναι μετρική στο X τότε και η $f \circ d$ είναι μετρική στο X .

(β) Αποδείξτε ότι αν $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, τότε καθεμιά από τις ακόλουθες ιδιότητες είναι ικανή να εξασφαλίσει την υποπροσθετικότητα της f :

(i) Η f είναι κοίλη συνάρτηση.

(ii) Η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα.

(γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) δείξτε ότι οι συναρτήσεις της Άσκησης 4 είναι μετρικές.

10. (Ανισότητα Holder για συναρτήσεις) Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και p, q συζυγείς εκθέτες (δηλ. $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Δείξτε ότι

$$\int_0^1 |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

11. Δείξτε ότι ο χώρος $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_p)$ με

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

είναι χώρος με νόρμα.

12. Θεωρούμε τον χώρο \mathcal{S} όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω (m_k) ακολουθία θετικών αριθμών, με $\sum_k m_k < +\infty$. Ορίζουμε απόσταση d στον \mathcal{S} ως εξής: αν $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \mathcal{S}$, θέτουμε

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Δείξτε ότι ο (\mathcal{S}, d) είναι μετρικός χώρος, και υπολογίστε τη διάμετρό του.

13. Έστω \mathcal{P} το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Αν $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ είναι ένα πολυώνυμο από το \mathcal{P} , το ύψος του p είναι το

$$h(p) = \max\{|a_i| : i = 0, 1, \dots, n\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο \mathcal{P} είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις κατά σημείο και η συνάρτηση $h : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον \mathcal{P} .

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\sigma(p) = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

είναι νόρμα στον \mathcal{P} .

(γ) Δείξτε ότι $h(p) \leq \sigma(p) \leq (n+1)h(p)$ για κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n .

14. Θεωρούμε το χώρο (\mathcal{P}, h) της προηγούμενης άσκησης και τον $(c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : (\mathcal{P}, h) \rightarrow (c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ με

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \xrightarrow{f} f(p) := a = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων που διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, η f είναι 1-1, επί και ικανοποιεί τις σχέσεις

1. $f(p+q) = f(p) + f(q)$,
2. $f(\lambda p) = \lambda f(p)$,

$$3. \|f(p)\|_\infty = h(p)$$

για κάθε $p, q \in \mathcal{P}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ομάδα Γ'

15. Σταθεροποιούμε έναν πρώτο αριθμό p και θεωρούμε το σύνολο \mathbb{Z} των ακεραίων. Αν $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \neq n$, θέτουμε $p(m, n)$ τη μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί τον $|n - m|$, δηλαδή αν $m \neq n$, τότε

$$p(m, n) = \max\{k \geq 0 : m \equiv n \pmod{p^k}\}.$$

Ορίζουμε $\sigma_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\sigma_p(m, n) = \begin{cases} 2^{-p(m, n)}, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η σ_p είναι μετρική στο \mathbb{Z} και ο (\mathbb{Z}, σ_p) είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

16. Εστω $\emptyset \neq A \subseteq (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρικός χώρος (X, ρ) ώστε

$$A = \{\rho(x, y) : x, y \in X, x \neq y\}.$$

17. Θεωρούμε τους χώρους ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$ και c_0 .

(α) Δείξτε ότι: αν $1 \leq p < q \leq \infty$ τότε $\ell_p \subseteq \ell_q$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

(β) Δείξτε ότι: αν $1 \leq p < \infty$ τότε $\ell_p \subseteq c_0$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

(γ) Να βρεθεί ακολουθία $x = (x_n)$ που συγκλίνει στο 0 αλλά δεν ανήκει σε κανέναν ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. Με άλλα λόγια, ο c_0 περιέχει γνήσια την ένωση $\bigcup\{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$.

(δ) Να βρεθεί ακολουθία $x = (x_n)$ ώστε $x \notin \ell_1$ αλλά $x \in \ell_p$ για κάθε $p > 1$.

18. Ο κύβος του Hilbert \mathcal{H}^∞ είναι η συλλογή όλων των ακολουθιών $x = (x_n)$ με $|x_n| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι η

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|$$

ορίζει μετρική στο \mathcal{H}^∞ .

(β) Αν $x, y \in \mathcal{H}^\infty$ και $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $M_k = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_k - y_k|\}$. Δείξτε ότι

$$2^{-k} M_k \leq d(x, y) \leq 2^{-k+1} + M_k.$$

19. Θεωρούμε τη μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 = 1\}$ στον \mathbb{R}^m . Ορίζουμε «απόσταση» $\rho(x, y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{m-1}$ να είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y . Δείξτε ότι: αν $\rho(x, y) = \theta$ τότε

$$\|x - y\|_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{2}{\pi} \rho(x, y) \leq \|x - y\|_2 \leq \rho(x, y), \quad x, y \in S^{m-1}.$$

Είναι η ρ μετρική στην S^{m-1} ;