Πτυχιακή εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης (29-3-2024)

Θέμα 1ο. (1,5+0,5=2 μον.)

(α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\ ,\ \text{για κάθε}\ \ (x,y) \in X \times X.$$

Αποδείξτε ότι: (i) η d είναι μετρική στον X και (ii) η μετρική d είναι ισοδύναμη με τη ρ.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε μετρικός χώρος είναι ομοιομορφικός με έναν φραγμένο μετρικό χώρο.

Θέμα 2ο. (1+1+1=3 μον.)

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

(α) Αν $A, B \subseteq X$ με $A \cup B = X$, αποδείξτε ότι $\overline{A} \cup B^{\circ} = X$.

(βi) Αν $A \subseteq X$, αποδείξτε ότι $\text{bd}(A) = \emptyset$ αν και μόνο αν το A είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό (clopen).

(βii) Δώστε παράδειγμα ενός μετρικού χώρου που έχει ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο χωρίς συνοριακά σημεία.

(γ) Έστω (Y, d) μετρικός χώρος και $f, g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $x_0 \in X$ με $f(x_0) \neq g(x_0)$, δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq g(z)$, για κάθε $x, z \in B(x_0, \delta)$.

Θέμα 3ο. (1,5+1=2,5 μον.)

(α) Έστω (X, ρ) και (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής και επί συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $\rho(x,z) \leq d(f(x), f(z))$, για κάθε $x, z \in X$. Αποδείξτε ότι:

(i) Η f είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης, τότε και ο (Y, d) είναι πλήρης.

(β) Στον μετρικό χώρο $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική, βρείτε μια ακολουθία (G_n) ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων με $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

Θέμα 4ο. (1+1=2 μον.)

(α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συμπάγειας, αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (K_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα η $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ να είναι μονοσύνολο. Αποδείξτε ότι $\text{diam}(K_n) \to 0$.

Θέμα 5ο. (1,5+1=2,5 μον.)

(α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0,1]$ τις ακολουθίες συναρτήσεων (f_n) και (g_n), όπου $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$\text{(i)}\ f_n(x) = x^n\ \ ,\quad \text{(ii)}\ g_n(x) = x^n(1-x),\ \text{για κάθε}\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1].$$

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f : X \to \mathbb{R}$ και $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων με $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής, αποδείξτε ότι και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Καλή επιτυχία!