Πραγματική Ανάλυση

Τελική Εξέταση - 2ο Κλιμάκιο

22 - 6 - 2022

Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας. Ο $\mathbb{R}$ και τα υποσύνολά του θεωρούνται εφοδιασμένα με τη συνήθη μετρική.

(1) Αν ο (X,d) είναι μετρικός χώρος και $x_0 \in X$, τότε το σύνολο $D = X \setminus \{x_0\}$ είναι πυκνό στον X.

(2) Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(3) Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,2)$ η οποία είναι επί του $[0,2)$.
(Στο $[0,1] \times [0,1]$ θεωρούμε τον περιορισμό της ευκλείδειας μετρικής του $\mathbb{R}^2$.)

Θέμα 2ο.

(α) Δίνεται μετρικός χώρος (X,d) και $A, B \subseteq X$. Αν $A \cap B = \emptyset$, δείξτε ότι $A^\circ \cap \overline{B} = \emptyset$.

(β) Έστω (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι, $f, g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις και $x_0 \in X$ με $f(x_0) \neq g(x_0)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε $f(y) \neq g(z)$, για κάθε $y, z \in B(x_0, r)$.

(γ) Βρείτε παράδειγμα μετρικού χώρου ο οποίος είναι φραγμένος, διαχωρίσιμος και πλήρης, αλλά δεν είναι συμπαγής, αποδεικνύοντας πλήρως τους ισχυρισμούς σας.

Θέμα 3ο.

(α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την ιδιότητα: Για κάθε $x \in X$, η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x,1)$ είναι συμπαγές σύνολο. Αποδείξτε ότι ο χώρος (X,d) είναι πλήρης.

(β) Έστω (Y,ρ) αριθμήσιμος μετρικός χώρος ($Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$) με την ιδιότητα: Κάθε σημείο του Y είναι σημείο συσσώρευσης του Y. Αποδείξτε ότι ο χώρος (Y,ρ) δεν είναι πλήρης. (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα σύνολα $G_n = Y \setminus \{y_n\}$.)

Θέμα 4ο.

(α) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1},\ x \in [0,+\infty)\ \ n \in \mathbb{N}.$$

(i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f και βρείτε την f.

(ii) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$, αλλά για κάθε $\delta > 0$, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[\delta,+\infty)$.

(β) Δίνεται ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $\delta > 0$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[\delta,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η οριακή συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Καλή επιτυχία!