

Πραγματική Ανάλυση - Ενδιάμεση Εξέταση

9 - 4 - 2022

Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή. Αν αυτό ισχύει αποδείξτε το, διαφορετικά δώστε αντιπαράδειγμα.

- (1) Σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο έχει σημεία συσσώρευσης.
- (2) Αν τα D, G είναι πυκνά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d) και το G είναι επιπλέον ανοιχτό, τότε η τομή τους $D \cap G$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .
- (3) Στον \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική, αν $B \subseteq \mathbb{R}$ με $B' = \emptyset$, τότε $(\mathbb{R} \setminus B)' \neq \emptyset$.

Θέμα 2ο.

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του X .

(α) Δείξτε ότι:

- (i) Αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$.
- (ii) Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε:

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + \text{dist}(A, B),$$

όπου $\text{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

(β) Για καθεμιά από τις περιπτώσεις (i), (ii) του (α) βρείτε παραδείγματα υποσυνόλων του \mathbb{R} για τα οποία ισχύει γνήσια ανισότητα και παραδείγματα για τα οποία ισχύει ισότητα.

Θέμα 3ο.

Στο σύνολο $X = (0, +\infty)$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική $d(x, y) = |x - y|$ και τη μετρική ρ με

$$\rho(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

(α) Δείξτε ότι:

- (i) Μια ακολουθία (x_n) στο $(0, +\infty)$ συγκλίνει στο $x \in (0, +\infty)$ με τη μετρική d αν και μόνο αν η (x_n) συγκλίνει στο x με τη μετρική ρ .
- (ii) Ένα υποσύνολο G του $X = (0, +\infty)$ είναι ανοιχτό στον (X, d) αν και μόνο αν το G είναι ανοιχτό στον (X, ρ) .

(β) Βρείτε μια ακολουθία (x_n) η οποία είναι Cauchy στον (X, d) αλλά δεν είναι Cauchy στον (X, ρ) .

Θέμα 4ο.

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(α) Αν $A, B \subseteq X$ με $A \cup B = X$, δείξτε ότι $A^\circ \cup \overline{B} = X$.

(β) Αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του X και $x_0 \notin F$, δείξτε ότι υπάρχουν U, V ανοιχτά υποσύνολα του X με $x_0 \in U$, $F \subseteq V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Καλή επιτυχία!