Πραγματική Ανάλυση – Ενδιάμεση Εξέταση

4 Δεκεμβρίου 2021

1. (2 μον.) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τα ακόλουθα.

(α) Αν G_1, G_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του X τότε το $G_1 \cap G_2$ είναι ανοικτό.

(β) Αν A, B είναι υποσύνολα του X και $A \cup B = X$, τότε $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

2. (2 μον.) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X ώστε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ να έχει ακριβώς ένα σημείο συσσώρευσης x. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(α) Αν η (x_n) είναι βασική τότε $x_n \to x$.

(β) Αν η (x_n) είναι φραγμένη τότε $x_n \to x$.

3. (2 μον.) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής και επί συνάρτηση.

(α) Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, έπεται αναγκαστικά ότι και ο Y είναι διαχωρίσιμος;

(β) Αν η f είναι $1-1$, έπεται αναγκαστικά ότι η f είναι ομοιομορφισμός;

4. (3 μον.) Θεωρήστε τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ εφοδιασμένα με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν ισχύει καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ είναι συνεχής τότε η f είναι σταθερή.

(γ) Αν η $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ είναι 1-1 συνάρτηση τότε η f δεν είναι συνεχής.

5. (3 μον.) (α) Στο $X = (0, 1]$ θεωρούμε τη μετρική $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος που δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Δείξτε ότι αν ο (X, d) είναι πλήρης τότε το X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Καλή Επιτυχία!

Σύντομες Απαντήσεις

1. (α) Έστω $x \in G_1 \cap G_2$. Τότε, $x \in G_1$ και $x \in G_2$. Αφού το G_1 είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_1) \subseteq G_1$. Αφού το G_2 είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_2 > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_2) \subseteq G_2$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\} > 0$. Τότε, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ και $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, άρα $B(x,\varepsilon) \subseteq B(x,\varepsilon_i) \subseteq G_i$, $i = 1,2$. Συνεπώς, $B(x,\varepsilon) \subseteq G_1 \cap G_2$.

(β) Δείχνουμε ότι: αν $x \in X$ και $x \notin \overline{A}$ τότε $x \in B^\circ$: αφού $x \notin \overline{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Όμως, από την υπόθεση ότι $A \cup B = X$ έχουμε $X \setminus A \subseteq B$. Άρα, $B(x,\varepsilon) \subseteq B$ και αυτό δείχνει ότι $x \in B^\circ$. Δείξαμε ότι $X \setminus \overline{A} \subseteq B^\circ$. Άρα, $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

2. (α) Σωστό: Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Αυτό γίνεται αναδρομικά. Αν έχουμε επιλέξει $k_1 < \cdots < k_n$ ώστε $d(x_{k_s},x) < 1/s$ για κάθε $s = 1,\ldots,n$, τότε αφού στη μπάλα $B\left(x,\frac{1}{n+1}\right)$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A, δηλαδή άπειροι όροι της (x_n), μπορούμε να βρούμε $k_{n+1} > k_n$ ώστε $d(x_{k_{n+1}},x) < \frac{1}{n+1}$. Τώρα είναι φανερό ότι η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n) και $d(x_{k_n},x) < 1/n \to 0$, άρα $x_{k_n} \to x$.

Αφού η (x_n) είναι βασική και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x, έπεται (γνωστό από τη θεωρία) ότι $x_n \to x$.

(β) Λάθος: Στο $\mathbb{R}$ θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = 2$ αν n περιττός και $x_n = 1/n$ αν n άρτιος. Η (x_n) είναι φραγμένη και το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ακριβώς ένα σημείο συσσώρευσης, το 0. Όμως, η (x_n) δεν συγκλίνει αφού $x_{2k-1} \to 2$ και $x_{2k} \to 0$.

3. (α) Σωστό: Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Θεωρούμε το $f(D) \subseteq Y$. Το $f(D)$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στον Y. Έστω $y \in Y$. Υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, μπορούμε να βρούμε $d_n \in D$ ώστε $d_n \to x$. Τότε, $f(d_n) \in f(D)$ και $f(d_n) \to f(x) = y$. Το $y \in Y$ ήταν τυχόν, άρα το $f(D)$ είναι πυκνό (και αριθμήσιμο) υποσύνολο του Y.

(β) Λάθος: Η ταυτοτική απεικόνιση $I : (\mathbb{R},\delta) \to (\mathbb{R},|\cdot|)$ όπου δ η διακριτή μετρική, είναι συνεχής 1-1 και επί, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός γιατί η αντίστροφή της δεν είναι συνεχής (εξηγήστε το, δείτε και το (γ) της επόμενης άσκησης που είναι παρόμοιο).

4. (α) Σωστό: Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = 1/2 > 0$. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $|n - n_0| < 1/2$ τότε $n = n_0$, άρα $f(n) = f(n_0)$, άρα $|f(n) - f(n_0)| = 0 < \varepsilon$. Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο n_0. Αφού το n_0 ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής.

(β) Σωστό: Έστω ότι υπάρχουν $x < y$ στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq f(y)$. Ανάμεσα στους $f(x)$ και $f(y)$ υπάρχει άρρητος ξ, και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $z \in (x,y)$ ώστε $f(z) = \xi$. Άτοπο, γιατί η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{Q}$.

(γ) Σωστό: Έστω ότι υπάρχει 1-1 και συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Για την ακολουθία $1/n \to 0$ έχουμε $f(1/n) \to f(0)$. Ως συγκλίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών η $(f(1/n))_{n=1}^{\infty}$ είναι τελικά σταθερή. Δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(1/n) = f(0)$ για κάθε $n \geq n_0$. Άτοπο, διότι η f είναι 1-1.

5. (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο $(0,1]$ ως προς την d. Τότε, η $1/x_n$ είναι βασική ως προς τη συνήθη μετρική στο $[1,\infty)$, άρα συγκλίνει: υπάρχει $y \geq 1$ ώστε $\frac{1}{x_n} \to y$. Αν θέσουμε $x = \frac{1}{y}$ τότε $x \in (0,1]$ και

$$d(x_n,x) = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x_n} - y\right| \to 0,$$

δηλαδή $x_n \to x$ ως προς την d.

(β) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος που δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Υποθέτουμε ότι το $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το x_n είναι σημείο συσσώρευσης του X, άρα το σύνολο

$V_n = X \setminus \{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης, το θεώρημα του Baire μας δίνει ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ είναι πυκνό, και ειδικότερα μη κενό. Όμως,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \{x_n\}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} = X \setminus X = \varnothing,$$

άρα καταλήγουμε σε άτοπο.