Πραγματική Ανάλυση, Ιούνιος 2021
19 Ιουνίου 2021
Εξ αποστάσεως εξέταση

Θέμα 1.
Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ ως μετρικό χώρο με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

(i) Βρείτε όλα τα ανοικτά υποσύνολα του μετρικού χώρου Y. (*Υπόδειξη:* Αν $A \subseteq Y$, να διακρίνετε τις περιπτώσεις $0 \in A$, $0 \notin A$.)

(ii) Βρείτε ένα πυκνό υποσύνολο D του Y με $D \neq Y$. Πόσα τέτοια σύνολα D υπάρχουν;

(iii) Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της συμπάγειας, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος Y είναι συμπαγής.

Θέμα 2.
Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι, για $A, B \subseteq X$ είναι
$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) \ : \ x \in A, \ y \in B\}$.
(α) Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

(i) Εξετάστε αν υπάρχουν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ κλειστά, με $A \cap B = \emptyset$ τέτοια ώστε $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

(ii) Εξετάστε αν υπάρχουν $A, B \subseteq [0, 1]$, κλειστά στο $\mathbb{R}$, με $A \cap B = \emptyset$ τέτοια ώστε $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
(β) Έστω $A, B \subseteq X$ κλειστά με $A \cap B = \emptyset$. Αποδείξτε ότι, αν $\operatorname{dist}(A, B) = 0$, τότε η συνάρτηση του Urysohn $f : X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 3.
Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία και
$D = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ένα πυκνό υποσύνολο του X.
(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $B(x, \varepsilon) \cap D$ είναι άπειρο.
(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε $y_n \in X$ με $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ και θέτουμε $E = \{y_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο E είναι πυκνό στον X.

Θέμα 4.
(α) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ σε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lim_{n \to \infty} f_n\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση g, αλλά η ακολουθία $\left(g_n(\frac{1}{n})\right)$ δεν συγκλίνει στο $g(0)$.

Διάρκεια εξέτασης: 90 λεπτά. Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
Καλή Επιτυχία