Πραγματική Ανάλυση – Τελική Εξέταση
29 Ιανουαρίου 2018

1. (1+0.6 μον.) (α) Για τα παρακάτω σύνολα στον $(\mathbb{R}^2, \rho)$, όπου ρ είναι η Ευκλείδεια μετρική, να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα και να γράψετε (χωρίς αιτιολόγηση) το εσωτερικό, την κλειστή θήκη και το σύνολο των σημείων συσσώρευσής τους.

$$A = \{(x,y) : |x| \leq 1\}, \quad B = \{(x,y) : x > 0 \text{ και } xy < 1\}, \quad C = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \Big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι: αν $A \subseteq B(x,r)$ για κάποια $x \in X$ και $r > 0$ τότε για κάθε $y \in X$ υπάρχει $R > 0$ ώστε $A \subseteq B(y,R)$.

2. (1+0.7+0.7 μον.) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A, B μη κενά υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $A \subseteq B$ τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(β) Αν τα A και B είναι συμπαγή και $\mathrm{dist}(A,B) = 0$ τότε $A \cap B \neq \emptyset$. [*Υπενθύμιση:* Η απόσταση των A και B ορίζεται ως εξής: $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$.]

(γ) Αν το A είναι ανοικτό και το B πυκνό τότε $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.

3. (0.8+0.8 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $1-1$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το $f(\mathbb{Q})$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = f(x^2y, xy^2)$ είναι συνεχής.

4. (1+1 μον.) (α) Θεωρούμε το $[0,\infty)$ με μετρική την $\sigma(x,y) = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right|$. Αποδείξτε ότι η σ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $[0,\infty)$ αλλά ο $([0,\infty), \sigma)$ δεν είναι πλήρης.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x,1)$ είναι συμπαγές σύνολο. Αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

5. (0.8+1.2 μον.) (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και (x_n) στον X ώστε $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές.

(β) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : (X,d) \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν το $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X \times \mathbb{R}$.

6. (0.7+0.7+1 μον.) (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, x e^{-nx^2}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \longrightarrow 0$ κατά σημείο και ότι για κάθε $\alpha > 0$ η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[\alpha, \infty)$. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $[0,\infty)$;

(β) Εξετάστε αν η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(1+kx^3)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

(γ) Έστω (X,d) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}),\ x \in X.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \longrightarrow 0$ ομοιόμορφα.

Καλή Επιτυχία!