Πραγματική Ανάλυση – Ενδιάμεση Εξέταση
2 Δεκεμβρίου 2017

1. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, G ανοικτό υποσύνολο του X, $x \in G$ και (x_n) ακολουθία στον X. Αν $x_n \to x$ αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $x_n \in G$.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, (x_n) βασική ακολουθία στον X και $A = \{x_n : n = 1,2,\ldots\}$. Υποθέτουμε ότι $A' \neq \emptyset$. Αποδείξτε ότι:

(i) Υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

(ii) Το σύνολο $A \cup \{x\}$ είναι κλειστό.

(3μ)

2. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A \neq \emptyset$ και $A \neq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν το A είναι κλειστό τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$

(ii) Αν το A είναι ανοικτό τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

(iii) Το σύνορο $\partial(A)$ του A είναι μη κενό. [*Υπόδειξη:* Υποθέστε ότι $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} = \emptyset$ και καταλήξτε σε άτοπο.]

(3 μον.)

3. (α) Έστω (X,d) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι. Θεωρούμε μια μετρική γινόμενο τ στο $X \times Y$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ ισχύει $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Αν το $A \times B$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times Y, \tau)$ μπορείτε να συμπεράνετε ότι τα A και B είναι κλειστά;

(β) Έστω $f, g : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $x \in X$ ώστε $f(x) \neq g(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε: για κάθε $y, z \in B(x,r)$ ισχύει $f(y) \neq g(z)$.

(3 μον.)

4. (α) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής και επί συνάρτηση, τέτοια ώστε $d(x_1,x_2) \leq \sigma(f(x_1), f(x_2))$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$. Αποδείξτε ότι ο (Y,σ) είναι πλήρης.

(β) Θεωρούμε το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι κάθε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$; Υπάρχει $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής και 1-1;

(3 μον.)

Καλή Επιτυχία!