Πραγματική Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2016–17

Τελική Εξέταση – 02 Φεβρουαρίου 2017

1. Έστω (X,d) και (Y,ρ) μετρικοί χώροι και $h\colon X \to Y$ ομοιομορφισμός. Εξετάστε ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας πλήρως (απόδειξη για αληθείς ή αντιπαράδειγμα για ψευδείς προτάσεις, αντίστοιχα).
(α) Ο X είναι ολικά φραγμένος αν και μόνο αν ο Y είναι ολικά φραγμένος.
(β) Ο X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο Y είναι διαχωρίσιμος.
(γ) Ο X είναι πλήρης αν και μόνο αν ο Y είναι πλήρης.

(2 μον.)

2. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι αν $x \in A'$, τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο x. (*Υπενθύμιση*: A' συμβολίζει το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A στον X.)
(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X χωρίς καθόλου υπακολουθιακά όρια (δηλαδή καμία υπακολουθία της δεν συγκλίνει). Δείξτε ότι τότε το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό.

(1.75 μον.)

3. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Υπενθυμίζεται ότι, για $x \in X$, $\operatorname{dist}(x,A) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}$ είναι η απόσταση του x από το A.
(α) Δείξτε ότι $\operatorname{dist}(x,A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.
(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) := \operatorname{dist}(x,A)$, $x \in X$, είναι συνεχής.
(γ) $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$ για κάθε $x \in X$.

(2.25 μον.)

4. Έστω (X,d) μετρικός χώρος.
(α) Αν $A \subseteq X$, δείξτε ότι το εσωτερικό A^{o} του A είναι ανοικτό σύνολο και ότι αν $A \subseteq B \subseteq X$, τότε $A^{o} \subseteq B^{o}$.
(β) Αν $A, B \subseteq X$, δείξτε ότι $A^{o} \cap B^{o} \subseteq (A \cap B)^{o}$ και $A^{o} \cup B^{o} \subseteq (A \cup B)^{o}$. Εξετάστε κατά πόσο ισχύουν ισότητες $A^{o} \cap B^{o} = (A \cap B)^{o}$ και/ή $A^{o} \cup B^{o} = (A \cup B)^{o}$. Αιτιολογείστε την απάντησή σας δίνοντας απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για κάθε μία από τις ισότητες.
(γ) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $G \subseteq X$ ανοικτό, και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in G$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_G \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B(x_n, 1/\sqrt{n}) \subseteq G$ για κάθε $n \geqslant n_G$, όπου $B(x_n, 1/\sqrt{n})$ η ανοικτή μπάλα κέντρου x_n και ακτίνας $1/\sqrt{n}$.

(2 μον.)

5. (α) Έστω (X,d) και (Y,ρ) μετρικοί χώροι και $h\colon X \to Y$ ένα προς ένα και επί συνάρτηση που είναι επίσης συνεχής. Δείξτε ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε η h είναι ομοιομορφισμός.
(β) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $x \in X$. Αποδείξτε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\bar{B}(x,1) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant 1\}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι ολικά φραγμένη.
(γ) Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: για κάθε οικογένεια F_i, $i \in I$, μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X για την οποία κάθε πεπερασμένη τομή $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m}$, $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in I$, είναι μη κενή, η τομή όλων των F_i είναι μη κενή, δηλαδή ισχύει ότι $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$. Δείξτε ότι τότε ο X είναι συμπαγής.

(2 μον.)

6. (α) Εξετάστε αν συγκλίνει κατά σημείο η ακολουθία συναρτήσεων $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \sqrt{n}x^2(1-x^2)^n \qquad x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε επίσης αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.
(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n(x^2+n)}.$$

(2 μον.)

Καλή επιτυχία!