Θεωρία Αναδρομής (ΑΛΜΑ), 3ο πακέτο ασκήσεων

23 Δεκεμβρίου 2023

1. Δείξτε ότι $L_{\equiv} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) = L(M_2)\} \notin \mathsf{RE}$.

2. Δείξτε ότι:

   (α΄) Για κάθε $L \in \mathsf{REC}$ ισχύει ότι $L \leq_m \{01\}$.

   (β΄) Για κάθε $L \in \mathsf{RE}$ ισχύει ότι $L \leq_m \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid M(\langle M \rangle)\downarrow\}$.

3. Εξετάστε αν η γλώσσα $L = \{\langle M_1, M_2, M_3 \rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) = L(M_2) \cup L(M_3)\}$ είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

4. Εξετάστε αν ηγλώσσα:

   $$L = \{\langle M, w \rangle \in \{0,1\}^* \mid \text{Η } M \text{ δεν τροποποιεί ποτέ το κομμάτι της ταινίας της που περιέχει τη } w\}$$

   είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

5. Εξετάστε αν η γλώσσα:

   $$L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \in \{0,1\}^* \mid L(M_1) \leq_m L(M_2)\}$$

   είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

6. Θεωρήστε τα σύνολα

   $$\begin{aligned} K &= \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n, \text{ και } M_n(w)\downarrow\} \\ R &= \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n, \text{ και } \mathsf{dom}(\phi_{M_n}) \in \mathsf{REC}\} \end{aligned}$$

   Ισχύει ότι $R \cup K \in \mathsf{RE}$;

7. Έστω γλώσσα $L' \subseteq \{0,1\}^*$. Θεωρήστε την ιδιότητα:

   $$\mathcal{P} = \{L \in \mathsf{RE} \mid L \cap L' \neq \emptyset\}$$

   (α΄) Δείξτε ότι αν $L' \notin \mathsf{RE}$ τότε και $L_{\mathcal{P}} \notin \mathsf{RE}$.

   (β΄) Ισχύει ότι αν $L' \in \mathsf{RE}$ τότε και $L_{\mathcal{P}} \in \mathsf{RE}$;

8. Δώστε παράδειγμα ιδιότητας που ικανοποιεί τα 1 και 3 στην εκφώνηση του Θεωρήματος 6.2.1, αλλά δεν ικανοποιεί το 2.

9. Εξετάστε αν οι γλώσσες:

   - $L_1 = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \text{Η } M \text{ τερματίζει για όλες τις λέξεις με άρτιο μήκος}\}$
   - $L_2 = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \text{Υπάρχει λέξη αρτίου μήκους για την οποία η } M \text{ τερματίζει}\}$

   είναι αναδρομικά απαριθμήσιμες.

10. Θεωρήστε την γλώσσα:

    $$L = \{\langle M \rangle \in \{0,1\}^* \mid \text{Υπάρχει Μ.Τ. } M', \text{ που } \textbf{δεν τερματίζει ποτέ}, \text{ τέτοια ώστε } \langle M' \rangle \in L(M)\}$$

    Εξετάστε αν η L είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.