Θεωρία Αναδρομής (ΑΛΜΑ), 1ο πακέτο ασκήσεων

27 Οκτωβρίου 2023

1. Έστω $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ υπολογίσιμη συνάρτηση. Κατασκευάστε απαριθμητή που απαριθμεί το σύνολο $\mathsf{dom}(f)$.

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } x \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n\text{, και υπάρχει } w \in \{0,1\}^* \text{ τέτοιο} \\ & \text{ ώστε } M_n(w)\downarrow \\ \bot & \text{, αλλιώς} \end{cases}$$

   όπου M_n είναι η TM με αριθμό Gödel n, είναι υπολογίσιμη.

3. Θεωρήστε τη γλώσσα:

$$L = \{\langle M, w, n\rangle \in \{0,1\}^* \mid n \geq 1 \text{ και κατά τον υπολογισμό } M(w) \text{ η κεφαλή επισκέπτεται τη } n\text{-οστή θέση της ταινίας}\}$$

   Δείξτε ότι $L \in \mathsf{REC}$.

4. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$. Δείξτε ότι $L \in \mathsf{RE}$ αν και μόνο αν υπάρχει γλώσσα $B \in \mathsf{REC}$ τέτοια ώστε $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists y \in \{0,1\}^*(\langle x, y\rangle \in B)\}$.

5. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$ και $L^p = \{w \in L \mid w = w^R\}$. Δείξτε ότι αν $L \in \mathsf{RE}$ τότε $L^p \in \mathsf{RE}$.

6. Έστω $L \subseteq \{0,1\}^*$. Δείξτε ότι αν $L \in \mathsf{RE}$ τότε $L^* \in \mathsf{RE}$.

7. Θεωρήστε τα σύνολα

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n\text{, και } M_n(w)\downarrow\}$$
$$R = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ δυαδική αναπαράσταση αριθμού, έστω του } n\text{, και } \mathsf{dom}(\phi_{M_n}) \in \mathsf{REC}\}$$

   όπου με M_n συμβολίζουμε την TM με αριθμό Gödel n και με ϕ_{M_n} τη συνάρτηση που υπολογίζει η M_n. Εξετάστε αν ισχύουν τα ακόλουθα:

   (α΄) $R \subseteq K$.

   (β΄) $R \cap K = \emptyset$.

   (γ΄) Υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : K \to \overline{K}$.

8. Δείξτε ότι:

   (α΄) Κάθε άπειρη αναδρομική γλώσσα είναι η ξένη ένωση δύο άπειρων αναδρομικών γλωσσών.

   (β΄) Κάθε άπειρη αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα είναι η ξένη ένωση δύο άπειρων αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών.

9. Έστω $A, B, C \subseteq \{0,1\}^*$. Λέμε ότι η C *διαχωρίζει* τις A και B αν $A \subseteq C$ και $B \subseteq \overline{C}$.

   (α΄) Βρείτε $A, B \in \mathsf{RE}$ με $A \cap B = \emptyset$ για τις οποίες δεν υπάρχει $C \in \mathsf{REC}$ που τις διαχωρίζει.

   (β΄) Έστω $A, B \subseteq \{0,1\}^*$ με $A \cap B = \emptyset$ και $\overline{A}, \overline{B} \in \mathsf{RE}$. Δείξτε ότι υπάρχει $C \in \mathsf{REC}$ που τις διαχωρίζει.

10. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες $L \subseteq \Sigma^*$ τέτοιες ώστε η $\bar{L}$ να είναι άπειρη γλώσσα αλλά κάθε αναδρομικά απαριθμήσιμο υποσύνολο της $\bar{L}$ να είναι πεπερασμένο.