ΜΑΘΗΜΑ 17

26 Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Το σύνολο των ρητών που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο μάθημα έχει όλες τις επιθυμητές αλγεβρικές ιδιότητες που αφορούν σε δύο πράξεις, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: είναι *σώμα*. Όμως αυτό το σώμα δεν περιέχει όλους τους αριθμούς: από την αρχαιότητα γνώριζαν ότι υπάρχουν "αριθμοί" που δεν είναι ρητοί, π.χ. το μήκος της υποτείνουσας ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου με μήκος κάθετης πλευράς ίσο με 1, είναι $\sqrt{2}$. Το $\sqrt{2}$ *ξέρουμε ακριβώς πόσο είναι*, γιατί μπορούμε να το κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη, αλλά δεν μπορούμε να το γράψουμε με μορφή κλάσματος (με ακέραιους όρους), δεν είναι ρητός. Ακόμη χειρότερα, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν "αριθμοί" που δεν είναι ρητοί και δεν μπορούμε ούτε να τους κατασκευάσουμε, όπως ο π. Με ποιόν τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο που να τους περιέχει όλους;

Υπάρχει τρόπος να πάρουμε τους πραγματικούς αριθμούς πάλι σαν κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης που ορίζεται στις ακολουθίες, αλλά χρειάζονται γνώσεις σχετικά με τις ακολουθίες που δεν τις έχουμε ακόμη. Ένας δεύτερος τρόπος είναι οι τομές Dedekind. Η προέγγιση αυτή στηρίζεται στην παρατήρηση ότι κάθε πραγματικός αριθμός ξ αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα με ένα δημείο A μιας ευθείας και το σημείο A καθορίζεται (πάλι αμφιμονοσήμαντα) από κάθε μια από τις δύο ημιευθείες που του αντιστοιχούν.

Παρακάτω δίνουμε μόνο μια περιγραφή της κατασκευής του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων του. Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε στις *Σημειώσεις* του *Απειροστικού Ι* που βρίσκονται στην η-τάξη.

26.1 Ορισμός του συνόλου $\mathbb{R}$

26.1 Ορισμός. Ένα σύνολο $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται ***τομή Dedekind***, αν ικανοποιεί τις επόμενες τρεις συνθήκες:

(i) $\alpha \neq \emptyset$ και $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
(ii) $p \in \alpha$ και $q \in \mathbb{Q}$ με $q < p \implies q \in \alpha$
(iii) $p \in \alpha \implies \exists\, q \in \alpha$ με $p < q$.

Οι τομές Dedekind περιγράφουν χρησιμοποιώντας μόνο τους ρητούς, τις τομές του $\mathbb{Q}$ με όλους τους ανοιχτούς αριστερούς ημιάξονες, δηλ. όλα τα σύνολα της μορφής $(-\infty, \xi) \cap \mathbb{Q}$, για οποιοδήποτε $\xi \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$p \in \alpha,\ q \notin \alpha \implies p < q, \text{ και}$$
$$r \notin \alpha,\ r < s \implies s \notin \alpha$$

26.2 Ορισμός. Ονομάζουμε ***σύνολο των πραγματικών αριθμών*** και συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$ το σύνολο των τομών Dedekind, δηλ.

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subseteq \mathbb{Q} \mid \alpha \text{ τομή Dedekind}\}.$$

26.2 Ορισμός της διάταξης

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta, \quad \text{και}$$
$$\alpha < \beta \iff \alpha \subsetneqq \beta$$

Είναι άμεσο ότι η σχέση $\leq$ είναι *διάταξη*. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι *ολική* διάταξη. Επομένως η αντίστοιχη αυστηρή διάταξη $<$ επάγεται στο $\mathbb{R}$ μια τριχοτομία: για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει ένα από τα ακόλουθα τρία:

$$\alpha < \beta \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta \quad \text{ή} \quad \beta < \alpha.$$

Αποδεικνύεται η επόμενη

26.3 Πρόταση. *Για κάθε φραγμένο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχει $\sup A \in \mathbb{R}$.*

Αξίζει να σημειώσουμε ότι

$$\sup A = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha.$$

26.3 Ορισμός της πρόσθεσης

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\alpha + \beta = \{p + q \mid p \in \alpha \ \wedge \ q \in \beta\}.$$

Μπορείτε (χωρίς δυσκολία) να αποδείξετε ότι το $\alpha + \beta$ είναι τομή Dedekind, άρα ένας πραγματικός αριθμός. Επίσης ότι ισχύει η επόμενη

26.4 Πρόταση. *Η πρόσθεση στο $\mathbb{R}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(i) Είναι μεταθετική.
(ii) Είναι προσεταιριστική.
(iii) Έχει ουδέτερο στοιχείο, το

$$0^* = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \ < 0 \in \mathbb{Q}\}.$$

(iv) Κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει αντίθετο $-\alpha \in \mathbb{R}$.
Δηλ. το ζεύγος $(\mathbb{R}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

26.4 Ορισμός του πολλαπλασιασμού

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$0^* \cdot \alpha = \alpha \cdot 0^* = 0^*.$$

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0^* < \alpha$ και $0^* < \beta$, θέτουμε

$$\alpha \cdot \beta = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, r, s \in \mathbb{Q} \text{ με } 0 < r \in \alpha,\ 0, s \in \beta \text{ και } q \leq rs\}.$$

Για $\alpha < 0^* < \beta$ θέτουμε

$$\alpha \cdot \beta = -(-a) \cdot \beta$$

και για $\alpha, \beta < 0^*$

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta).$$

26.5 Πρόταση. *Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(i) Είναι μεταθετικός.
(ii) Είναι προσεταιριστικός.
(iii) Έχει ουδέτερο στοιχείο, το

$$1^* = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \ < 1 \in \mathbb{Q}\}.$$

(iv) Κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0^*$ έχει αντίστροφο.
Δηλ. το ζεύγος $(\mathbb{R} \setminus \{0^*\}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Οι δύο πράξεις του $\mathbb{R}$ συνδέονται με την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Συνοψίζοντας όλα τα συμπεράσματα μας μαζί, έχουμε το

26.6 Θεώρημα. *Η τετράδα $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα.*

26.5 Το $\mathbb{R}$ σαν επέκταση του $\mathbb{Q}$

Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ θέτουμε

$$q^* = \{p \in \mathbb{Q} \,|p < q\}.$$

Προφανώς $q^* \in \mathbb{R}$. Τώρα θέτουμε

$$I : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} : I(q) = q^*.$$

Η απεικόνιση I είναι 1-1 και διατηρεί την διάταξη και τις πράξεις. Έτσι, μπορούμε να θεωρούμε ότι το σύνολο των ρητών είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών:

$$\mathbb{Q} \equiv I(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}.$$