ΜΑΘΗΜΑ 15

20 Ακέραιοι

Στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o$ ορίζουμε την διμελή σχέση

$$(a, b) \sim (p, q) \iff a + q = b + p.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας:

(i) Για κάθε $(a, b) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o$, είναι $a + b = b + a$, άρα $(a, b) \sim (a, b)$ και η $\sim$ είναι ανακλαστική.

(ii) Αν $(a, b) \sim (p, q)$, τότε $a + q = b + p$, ή, ισοδύναμα, $p + b = q + a$, δηλ. $(p, q) \sim (a, b)$ και η $\sim$ είναι συμμετρική.

(iii) Αν $(a, b) \sim (p, q)$ και $(p, q) \sim (x, y)$, τότε $a+q = b+p$ και $p+y = q+x$. Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $a + p + q + y = b + q + p + x$, και απαλείφοντας το $p + q$, έχουμε $a + y = b + x$, δηλ. $(a, b) \sim (x, y)$ και η $\sim$ είναι μεταβατική.

Επομένως η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και για κάθε $(a, b) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o$ υπάρχει η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(x, y) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o \mid (x, y) \sim (a, b)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o \mid a + y = b + x\} \end{aligned}$$

Για να απλοποιήσουμετον συμβολισμό, θα γράφουμε $[a, b]$ αντί $[(a, b)]$.

Ονομάζουμε **ακέραιο αριθμό** κάθε κλάση ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$ και συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}$ το σύνολο-πηλίκο $(\mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o)/\sim$, δηλ. το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\mathbb{Z} = \{[a, b] \mid (a, b) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o\}.$$

Θα μελετήσουμε την μορφή που παίρνουν οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης. Θεωρούμε ένα $(a, b) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Αν $a < b$, τότε υπάρχει $q \in \mathbb{N}_o$ με $a + q = b = b + 0$, οπότε $(a, b) \sim (0, q)$. Επίσης, για κάθε $(x, y) \in [a, b]$, λόγω της μεταβατικής διότητας, $(x, y) \sim (0, q)$, δηλ. $x + q = y$, ή $(x, y) = (x, x + q)$. Άρα, για $b = a + q$,

$$[a, b] = [0, q] = \{(x, x + q) \mid x \in \mathbb{N}_o\}.$$

(2) Αν $a = b$, τότε $(a, b) = (a, a) \sim (0, 0) \sim (x, x)$, για κάθε $x \in \mathbb{N}_o$, δηλ.

$$[a, a] = [0, 0] = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}_o\}.$$

(3) Αν $a > b$, τότε υπάρχει $q \in \mathbb{N}_o$ με $a = b + q$, οπότε $(a, b) \sim (q, 0)$. Όπως και στο (1), για κάθε $(x, y) \in [a, b]$, ισχύει και $(x, y) \sim (q, 0)$, δηλ. $x = y + q$, ή $(x, y) = (y + q, y)$. Άρα, για $a = b + q$,

$$[a, b] = [q, 0] = \{(y + q, y) \mid y \in \mathbb{N}_o\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας (: ακέραιος αριθμός) παίρνει μία από τις παρακάτω τρεις μορφές:

$$[q, 0] \quad \text{ή} \quad [q, q] = [0, 0] \quad \text{ή} \quad [0, q]$$

για κάποιο $q \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\mathbb{Z} = \{[0, q] \mid q \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, 0]\} \cup \{[q, 0] \mid q \in \mathbb{N}\}.$$

Κάθε κλάση της μορφής $[q, 0]$ την ονομάζουμε **θετικό** ακέραιο, ενώ της μορφής $[0, q]$ **αρνητικό** ακέραιο.

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίζουμε *πρόσθεση*, ως εξής:

$$[a, b] + [p, q] = [a + p, b + q].$$

20.1 Πρόταση. *Η πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$ είναι καλά ορισμένη και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) Είναι μεταθετική.

(ii) Είναι προσεταιριστική.

(iii) Έχει ουδέτερο το $[0, 0]$.

(iv) Κάθε $[a, b] \in \mathbb{Z}$ έχει αντίθετο το $[b, a]$.

Απόδειξη. Λέγοντας ότι η πρόσθεση είναι καλά ορισμένη, εννοούμε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους των κλάσεων που προστίθενται, δηλ: αν $[a,b]=[a',b']$ και $[p,q]=[p',q']$, τότε

$$[a+p,b+q]=[a'+p',b'+q'].$$

Πράγματι,

$$\left.\begin{array}{rcl}[a,b] & = & [a',b'] \\ [p,q] & = & [p',q']\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b' & = & a'+b \\ p+q' & = & p'+q\end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow a+p+b'+q'=a'+p'+b+q$$
$$\Longrightarrow [a+p,b+q]=[a'+p',b'+q']$$

Δείχνουμε τώρα ότι η πρόσθεση είναι μεταθετική:

$$[a,b]+[p,q]=[a+p,b+q]=[p+a,q+b]=[p,q]+[a,b]$$

Επίσης είναι προσεταιριστική:

$$\begin{aligned}([a,b]+[p,q])+[x,y]= & \ [a+p,b+q]+[x,y]=[(a+p)+x,(b+q)+y] \\ = & \ [a+(p+x),b+(q+y)]= \ [a,b]+[p+x,q+y] \\ = & \ [a,b]+([p,q]+[x,y])\end{aligned}$$

Έχει ουδέτερο στοιχείο, το $[0,0]$:

$$[a,b]+[0,0]=[a,b], \qquad \forall\ [a,b]\in\mathbb{Z}.$$

Τέλος, κάθε $[a,b]\in\mathbb{Z}$ έχει αντίθετο, το $[b,a]$:

$$[a,b]+[b,a]=[a+b,b+a]=[0,0].$$ □

Ορίζουμε τώρα *πολλαπλασιασμό* στο $\mathbb{Z}$, μέσω της σχέσης

$$[a,b]\cdot[x,y]=[ax+by,ay+bx].$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $q\in\mathbb{N}_o$ και κάθε $[x,y]\in\mathbb{Z}$, είναι

$$[q,q]\cdot[x,y]=[0,0] \tag{1}$$
$$[q,0]\cdot[x,y]=[qx,qy] \tag{2}$$
$$[0,q]\cdot[x,y]=[qy,qx] \tag{3}$$

20.2 Πρόταση. *Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Z}$ είναι καλά ορισμένος και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) Είναι μεταθετικός.

(ii) Είναι προσεταιριστικός.

(iii) Έχει ουδέτερο το $[1,0]$.

(iv) Για κάθε $[a,b] \in \mathbb{Z}$ με $[a,b] \neq [0,0]$ ισχύει ο νόμος της διαγραφής:

$$[a,b] \cdot [m,n] = [a,b] \cdot [x,y] \implies [m,n] = [x,y].$$

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος αρκεί να δείξουμε ότι αν $[a,b] = [a',b']$, τότε για κάθε $[x,y] \in \mathbb{Z}$, ισχύει

$$[a,b] \cdot [x,y] = [a',b'] \cdot [x,y].$$

Από την υπόθεση προκύπτει ότι $a + b' = a' + b$, ενώ η ζητούμενη ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$[ax + by, ay + bx] = [a'x + b'y, a'y + b'x]$$

δηλ. με την

$$ax + by + a'y + b'x = ay + bx + a'x + b'y,$$

η οποία αληθεύει, διότι

$$\begin{aligned} ax + by + a'y + b'x &= (a + b')x + (a' + b)y \\ &= (a' + b)x + (a + b')y \\ &= a'x + bx + ay + b'y \end{aligned}$$

Είναι άμεσο ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός και προσεταιριστικός. Επίσης, το $[1,0]$ είναι ουδέτερο στοιχείο: για κάθε $[x,y] \in \mathbb{Z}$, ισχύει

$$[x,y] \cdot [1,0] = [x + 0, 0 + y] = [x,y].$$

Δείχνουμε τον νόμο της διαγραφής: Έστω $[a,b] \neq [0,0]$ (άρα $a \neq b$). Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{N}$ με $[a,b] = [q,0]$, ή $[a,b] = [0,q]$. Έστω ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση. Τότε

$$\begin{aligned} [a,b] \cdot [m,n] = [a,b] \cdot [x,y] &\implies [q,0] \cdot [m,n] = [q,0] \cdot [x,y] \\ &\implies [qm + 0, 0 + qn] = [qx + 0, 0 + qy] \\ &\implies qm + qy = qn + qx \\ &\implies m + y = n + x \\ &\implies [m,n] = [x,y] \end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται και στην δεύτερη περίπτωση. □

Συνδυάζοντας τις δύο πράξεις,με ένα απλό υπολογισμό βρίσκουμε ότι ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

20.3 Πρόταση. *Για κάθε* $[a,b],[m,n],[p,q]\in\mathbb{Z}$, *ισχύει*

$$[a,b]\cdot([m,n]+[p,q])=[a,b]\cdot[m,n]+[a,b]\cdot[p,q].$$

Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα και χρησιμοποιώντας την ορολογία της άλγεβρας, έχουμε το επόμενο

20.4 Θεώρημα. *Η τριάδα* $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ *είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.*

21 Διάταξη

Στο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε *διάταξη* μέσω των ισοδυναμιών

$$\begin{aligned}[a,b]\le[m,n] &\iff \exists\,[x,y]\in\mathbb{Z}\quad \text{με}\quad x\ge y\quad \text{και}\quad [a,b]+[x,y]=[m,n]\\ &\iff \exists q\in\mathbb{N}_o\quad \text{με}\quad [a,b]+[q,0]=[m,n]\\ &\iff a+n\le b+m.\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι για τις κλάσεις $[q,0]\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, που ονομάσαμε *θετικούς ακέραιους* στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύει $[0,0]\le[q,0]$, ενώ για τους *αρνητικούς* $[0,q]$, ισχύει $[0,q]\le[0,0]$.

21.1 Πρόταση. *Για την σχέση* $\le$ *του* $\mathbb{Z}$ *ισχύουν τα επόμενα:*
(i) *Είναι ολική διάταξη.*
(ii) *Για κάθε τριάδα* $[a,b],[m,n],[p,q]\in\mathbb{Z}$, *ισχύει*

$$[a,b]\le[m,n]\implies[a,b]+[p,q]\le[m,n]+[p,q].$$

(iii) *Για κάθε τριάδα* $[a,b],[m,n],[x,y]\in\mathbb{Z}$, *με* $[0,0]\le[x,y]$ *ισχύει*

$$[a,b]\le[m,n]\implies[a,b]\cdot[x,y]\le[m,n]\cdot[x,y].$$

Απόδειξη. (i) Η σχέση είναι ανακλαστική: $\forall\,[a,b]\in\mathbb{Z}$,

$$a+b\le b+a\implies[a,b]\le[a,b].$$

Είναι αντισυμμετρική:

$$\left.\begin{array}{rcl}[a,b] & \leq & [m,n] \\ [m,n] & \leq & [a,b]\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+n & \leq & m+b \\ m+b & \leq & a+n\end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow a+n=b+m$$
$$\Longrightarrow [a,b]=[m,n]$$

Είναι μεταβατική:

$$\left.\begin{array}{rcl}[a,b] & \leq & [m,n] \\ [m,n] & \leq & [p,q]\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+n & \leq & m+b \\ m+q & \leq & p+n\end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow a+n+m+q \leq b+m+p+n$$
$$\Longrightarrow a+q \leq b+p$$
$$\Longrightarrow [a,b] \leq [p,q]$$

Άρα είναι διάταξη. Δείχνουμε ότι είναι ολική: Έστω $[a,b],[p,q] \in \mathbb{Z}$. Επειδή η διάταξη των φυσικών είναι ολική, ισχύει είτε $a+q \leq b+p$, οπότε $[a,b] \leq [p,q]$ είτε $b+p \leq a+q$, οπότε $[p,q] \leq [a,b]$.

(ii) Προφανές, αφού η ζητούμενη συνεπαγωγή ισοδυναμεί με την

$$a+n \leq b+m \implies a+p+n+q \leq b+q+p+m.$$

(iii) Επειδή $[0,0] \leq [x,y]$, υπάρχει $q \in \mathbb{N}_o$ με $[x,y]=[q,0]$. Κι επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος, για ευκολία χρησιμοποιούμε το ζεύγος $(q,0)$ σαν αντιπρόσωπο της κλάσης $[x,y]$.

$$\begin{aligned}[a,b] \leq [m,n] &\Longrightarrow a+n \leq b+m \\ &\Longrightarrow aq+nq \leq bq+mq \\ &\Longrightarrow [aq,qb] \leq [mq,nq] \\ &\Longrightarrow [a,b]\cdot[q,0] \leq [m,n]\cdot[q,0] \\ &\Longrightarrow [a,b]\cdot[x,y] \leq [m,n]\cdot[x,y]\end{aligned}$$ □

21.2 Παρατήρηση. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε θετικός $[a,b] \in \mathbb{Z}$ παίρνει την μορφή $[a,b]=[q,0]$, $q \in \mathbb{N}$ και κάθε αρνητικός παίρνει την μορφή $[0,q]$. Πολλαπλασιάζοντας έχουμε:

(1) Το γινόμενο θετικών είναι θετικός:

$$[p,0]\cdot[q,0]=[pq+0,0+0]=[pq,0].$$

(2) Το γινόμενο αρνητικών είναι θετικός:

$$[0,p]\cdot[0,q] = [0+pq, 0+0] = [pq, 0].$$

(3) Το γινόμενο θετικού με αρνητικό είναι αρνητικός:

$$[p,0]\cdot[0,q] = [0+0, pq+0] = [0, pq].$$

22 Οι Ακέραιοι σαν Επέκταση των Φυσικών

Σε αυτή την παράγραφο θα συζητήσουμε πώς μπορούμε να θεωρούμε το σύνολο των ακεραίων σαν υπερσύνολο των φυσικών, χωρίς να παραβιάζεται η δομή τους.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathbb{Z} : \phi(n) = [n, 0], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_o,$$

που στέλνει κάθε φυσικό αριθμό στον αντίστοιχο θετικό ακέραιο.

22.1 Πρόταση. (i) *Η ϕ είναι 1-1.*

(ii) *Η ϕ διατηρεί τις πράξεις, δηλ., για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_o$,*

$$\begin{gathered} \phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n), \\ \phi(mn) = \phi(m)\phi(n) \end{gathered}$$

(iii) *Η ϕ διατηρεί την διάταξη:*

$$m \leq n \implies \phi(m) \leq \phi(n).$$

Απόδειξη. (i) Η ϕ είναι 1-1:

$$\phi(m) = \phi(n) \implies [m,0] = [n,0] \implies m+0 = 0+n \implies m = n.$$

(ii) Για την διατήρηση των πράξεων παρατηρούμε ότι

$$\begin{gathered} \phi(m+n) = [m+n, 0] = [m,0] + [n,0] = \phi(m) + \phi(n) \\ \phi(mn) = [mn, 0] = [m,0]\cdot[n,0] = \phi(m)\cdot\phi(n) \end{gathered}$$

(iii) Τέλος, για την διατήρηση της διάταξης έχουμε

$$\begin{aligned} m \leq n &\implies \exists\, q \in \mathbb{N}_o \;:\; m+q = n \\ &\implies \exists\, q \in \mathbb{N}_o \;:\; [m,0] + [q,0] = [n,0] \\ &\implies [m,0] \leq [n,0] \\ &\implies \phi(m) \leq \phi(n) \end{aligned}$$

□

Επειδή η απεικόνιση ϕ είναι 1-1, μπορούμε να ταυτίζουμε το σύνολο $\mathbb{N}_o$ με την εικόνα $\phi(\mathbb{N}_o)$, που συμπίπτει με το σύνολο που περιέχει το "μηδέν" των ακεραίων (δηλ. το ουδέτερο στοιχείο $[0,0]$ της πρόσθεσης) και τους θετικούς ακέραιους. Δηλ.

$$\mathbb{N}_o \equiv \phi(\mathbb{N}_o) = \mathbb{Z}_o^+ = \{[q,0] \mid q \in \mathbb{N}_o\}.$$

Έτσι, το $0 \in \mathbb{N}_o$ ταυτίζεται με το $[0,0] \in \mathbb{Z}$ και κάθε $q \in \mathbb{N}$ ταυτίζεται με τον θετικό ακέραιο $[q,0]$.

Παρακάτω θα εξακολουθήσουμε να χρησιμοποιούμε το σύνηθες σύμβολο q για τον ακέραιο $[q,0]$ που προέρχεται (:είναι εικόνα) από τον φυσικό $q \in \mathbb{N}_o$, ενώ τον αρνητικό ακέραιο $[0,q]$, με $q \in \mathbb{N}$, θα τον συμβολίζουμε με το (γνωστό μας) σύμβολο $-q$.