ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5

1. Να δείξετε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

(α) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(β) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

(γ) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(δ) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Απάντηση. (α) Παρατηρούμε ότι για $n = 1$ η ισότητα (α) γίνεται $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, δηλ. ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

άρα η ισότητα ισχύει και για $n + 1$, και από την Αρχή της Επαγωγής, ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Παρατηρούμε ότι η δεύτερη από τις ισότητες (β) είναι το τετράγωνο της (α), άρα ισχύει. Για την πρώτη ισότητα: για $n = 1$, γίνεται $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$, άρα ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\ &= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

άρα η πρώτη ισότητα ισχύει και για $n + 1$, και από την Αρχή της Επαγωγής, ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Παρατηρούμε ότι για $n = 1$,

$$1 = 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Έστω ότι η πρόταση αληθεύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned}1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!\\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!\\ &= (n+1)![1 + (n+1)] - 1 = (n+1)!(n+2) - 1\\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Από την Αρχή της Επαγωγής, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(δ) Παρατηρούμε ότι για $n = 1$, η ισότητα γίνεται $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, άρα ισχύει. Έστω ότι η ισότητα αληθεύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned}1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1) \cdot (n+2)\\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3},\end{aligned}$$

και από την Αρχή της Επαγωγής, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Να δείξετε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

(α) $3 \mid (n^3 - n)$.

(β) $133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1})$.

Απάντηση. (α) Για $n = 1$, προκύπτει η πρόταση $3 \,|\, 0$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλ. Υπάρχει $k \in N$ με $n^3 - n = 3k$. Τότε

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)\\ &= 3(k + n^2 + n)\end{aligned}$$

άρα και το $(n+1)^3 - (n+1)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3, και από την Αρχή της Επαγωγής, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Για $n = 1$, έχουμε

$$11^{1+1} + 12^{2 \cdot 1 - 1} = 11^2 + 12 = 121 + 12 = 133 \mid 133,$$

δηλ. η πρόταση ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι το 133 διαιρεί το $11^{n+1} + 12^{2n-1}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλ. υπάρχει $k \in N$ με $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133k$. Τότε

$$\begin{aligned}
11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1} &= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11 \cdot 133k + 133 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 133(11k + 12^{2n-1})
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

3. Να βρείτε για ποιά $n \in \mathbb{N}$ ισχύει κάθε μία από τις ανισότητες:
(α) $n < 2^n$ (β) $n < n!$ (γ) $n^3 + 1 \leq 2^n$ (δ) $2n^2 < 3^{n-1}$ (ε) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Απάντηση. (α) Για $n = 1$, παίρνουμε $1 < 2$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$n + 1 < 2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

και η ανισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Για $n = 1$ παίρνουμε $1 < 1!$, που δεν ισχύει. Για $n = 2$, παίρνουμε $2 < 2! = 2$, που επίσης δεν ισχύει. Για $n = 3$ προκύπτει $3 < 3! = 6$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Τότε

$$n + 1 < n(n + 1) < n!(n + 1) = (n + 1)!$$

και η ανισότητα ισχύει για κάθε $n \geq 3$.

(γ) Για $n = 1$ παίρνουμε $2 \leq 2$, που ισχύει, όμως η ανισότητα δεν ισχύει για $n = 2, 3, \ldots, 9$, ενώ ισχύει πάλι για $n = 10$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$. Τότε

$$\begin{aligned}
(n + 1)^3 + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 1 &\leq 2^n + 3n^2 + 3n + 1 \\
&< 2^n + 6n^2 + 1 < 2^n + n^3 + 1 \\
&\leq 2^n + 2^n = 2^{n+1},
\end{aligned}$$

και η ανισότητα ισχύει για $n = 1$ και για κάθε $n \geq 10$.

(δ) Για $1 \leq n \leq 4$ παίρνουμε ανισότητες που δεν ισχύουν. Για $n = 5$, προκύπτει η ανισότητα $50 < 81$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο

$n \in \mathbb{N}$, με $n \geq 5$. Τότε

$$\begin{aligned} 2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2 &= 2n^2 + 2(2n) + 2 \\ &< 2n^2 + 2n^2 + 2n^2 = 3 \cdot 2n^2 \\ &< 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \end{aligned}$$

άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε $n \geq 5$.

(ε) Για $n = 1$ παίρνουμε ισότητα και για $n = 2$ παίρνουμε $2 < \frac{9}{4}$, που ισχύει. Υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Από την υπόθεση προκύπτει

$$(n+1)! = n!(n+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1)$$

Η ζητούμενη ανισότητα $(n+1)! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$ προκύπτει, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, αν αποδείξουμε ότι $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1) < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$. Πράγματι, έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1) < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}} \\ &\Leftrightarrow 2(n+1)^{n+1} < (n+2)^{n+1} \\ &\Leftrightarrow 2 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στο δεξιό μέρος της τελευταίας ανισότητας εμφανίζεται ο $(n+1)-$όρος της ακολουθίας $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, που είναι γνησίως αύξουσα, με $a_1 = 2$, άρα η τελευταία ανισότητα ισχύει, και από αυτή προκύπτει το ζητούμενο.

4. Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \geq 1$.

Απάντηση. Για $n = 1$ έχουμε $1 \leq 2 - 1 = 1$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \le 2 - \frac{1}{n+1}$$

και το ζητούμενο θα προκύψει από την μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \le 2 - \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow \frac{n+2}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow n^2 + 2n \le (n+1)^2
\end{aligned}$$

που ισχύει.

5. Να δείξετε ότι

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n} - 1,$$

για κάθε $n \ge 1$.

Απάντηση. Για $n = 1$ προκύπτουν οι σχέσεις $2\sqrt{2} - 2 \le 1 \le 2 - 1$, που ισχύουν. Υποθέτουμε ότι οι ανισότητες ισχύουν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε την ανισότητα αριστερά: Από την υπόθεση προκύπτει

$$2(\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

και το ζητούμενο θα προκύψει από την μεταβατική ιδιότητα, αν αποδείξουμε ότι

$$2(\sqrt{n+2} - 1) \le 2(\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Πράγματι, ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}
&2(\sqrt{n+2} - 1) \le 2(\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow \\
&2\sqrt{(n+2)(n+1)} \le 2(n+1) + 1 \Leftrightarrow \\
&4(n+2)(n+1) \le (2n+3)^2 \Leftrightarrow \\
&4n^2 + 12n + 8 \le 4n^2 + 12n + 9
\end{aligned}$$

η τελευταία από τις οποίες είναι προφανής.

Δείχνουμε τώρα την ανισότητα δεξιά: Από την υπόθεση προκύπτει

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

και το ζητούμενο θα προκύψει πάλι από την μεταβατική ιδιότητα, αν αποδείξουμε ότι

$$2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

Πράγματι, ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - 1) &\Leftrightarrow \ 2\sqrt{n^2+n} + 1 \leq 2(n+1) \\ &\Leftrightarrow \ 4n^2 + 4n \leq (2n+1)^2 \end{aligned}$$

η τελευταία από τις οποίες είναι προφανής.

6. Με την μέθοδο της επαγωγής αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση. Για $n = 1$ προκύπτει η αληθής ανισότητα $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε, πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα της υπόθεσης με $\frac{2n+1}{2(n+1)}$, παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

και το ζητούμενο προκύπτει από την μεταβατική ιδιότητα, αν δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Για το τελευταίο, έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \ \Leftrightarrow \\ &\sqrt{(2n+1)(2n+3)} \leq 2n+2 \ \Leftrightarrow \\ &4n^2 + 8n + 3 \leq 4n^2 + 8n + 4 \end{aligned}$$

από τις οποίες η τελευταία είναι προφανής, και το ζητούμενο αποδείχθηκε.