ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

1. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που να είναι:

(i) 1-1 αλλά όχι επί.
(ii) επί αλλά όχι 1-1.
(iii) 1-1 και επί.
(iv) ούτε 1-1 ούτε επί.

Απάντηση. (i) $f(x) = 2x$.
(ii) $f(x) = k$, αν $x = 2k$ ή $x = 2k - 1$.
(iii) $f(x) = x + 1$.
(iv) $f(x) = x^2$.

2. Αν $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$, δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση από το A στο B και δεν υπάρχει συνάρτηση από το B στο A. Υπάρχει συνάρτηση από το $\emptyset$ στο $\emptyset$;

Απάντηση. Έστω $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$. Τότε $A \times B = \emptyset \times B = \emptyset$. Η μοναδική σχέση από το $A = \emptyset$ στο B, δηλ. το μοναδικο υποσύνολο του $\emptyset \times B$, είναι το $\emptyset$. Το $\emptyset$ είναι συνάρτηση : $\emptyset \to B$, αν ισχύει η συνθήκη

$$\forall\, x \in \emptyset \ \ \exists\,!\, y \in B \ : \ (x, y) \in \emptyset$$

Ισχυριζόμαστε ότι η συνθήκη ισχύει. Το αποδεικνύουμε με άτοπο: Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε ισχύει η άρνηση της συνθήκης, δηλ.

$$\underline{\exists\, x \in \emptyset} \ : \ \forall\, y \in B, \ (x, y) \notin \emptyset.$$

που είναι άτοπο. Το αποτέλεσμα αυτό δεν επηρεάζεται αν το B είναι ή δεν είναι κενό, άρα $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ είναι συνάρτηση.

Όμως αν $B \neq \emptyset$, μια συνάρτηση $f : B \to A = \emptyset$, αν ισχύει η συνθήκη

$$\forall\, x \in B \ \ \underline{\exists\,!\, y \in \emptyset} \ : \ (x, y) \in f,$$

που δεν ισχύει ποτέ, άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

3. Αν $f : A \to B$ είναι συνάρτηση και $X \subseteq B$, δείξτε ότι:

$$f^{-1}(B \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X).$$

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \setminus X) &\iff f(x) \in B \setminus X \\ &\iff f(x) \in B \ \wedge \ f(x) \notin X \\ &\iff x \in A \ \wedge \ x \notin f^{-1}(X) \\ &\iff x \in A \setminus f^{-1}(X). \end{aligned}$$

4. Οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ και πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ποιό είναι το μεγαλύτερο δυνατό πεδίο ορισμού.

$$h(x) = \ln x, \quad \alpha(v) = -v, \quad j(\beta) = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \quad g(u) = \ln(\ln(\cos u)).$$

Απάντηση.
$\exists \ \ln x \in \mathbb{R} \iff x > 0$, άρα $A_h = (0, +\infty)$
$\forall \ v \in \mathbb{R}, \ \exists \ -v = \alpha(v) \in \mathbb{R}$, άρα $A_\alpha = \mathbb{R}$
$\exists \ \frac{1}{\beta^2-1} \in \mathbb{R} \iff \beta^2 - 1 \neq 0 \iff \beta \neq \pm 1$. Άρα $A_j = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.
Για να υπάρχει το $g(u) = \ln(\ln(\cos u))$, πρέπει $\ln(\cos u) > 0$, το οποίο συμβαίνει αν $\cos u > 1$, άτοπο. Άρα δεν ορίζεται η σψνάρτηση g.

5. Προσδιορίστε την εικόνα των ακόλουθων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(α) $f(x) = x^3$.
(β) $f(x) = x - 4$
(γ) $f(x) = e^x + 3$
(δ) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Απάντηση. (α) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένα $x \in \mathbb{R}$ με $x = \sqrt[3]{y}$, επομένως για κάθε $y \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένα $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 = y$.
Άρα f επί και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένα $x = y + 4 \in \mathbb{R}$ με $f(x) = y$, άρα f επί και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(γ) $e^x > 0$, άρα $e^x + 3 > 3$, δηλ. $f(\mathbb{R}) \subseteq (3, +\infty)$. Αντίστροφα, έστω $y \in (3, +\infty)$, τότε $y - 3 > 0$, άρα υπάρχει $x = \ln(y-3)$, για το οποίο έχουμε $f(x) = e^{\ln(y-3)} + 3 = y - 3 + 3 = y$. Επομένως $(3, +\infty) \subseteq f(\mathbb{R})$ και τελικά $f(\mathbb{R}) = (3, +\infty)$.

(δ) $f(0) = 0$, άρα $0 \in f(\mathbb{R})$. Αν $y \neq 0$, υπάρχει ακριβώς ένα $x = \frac{1}{y} \neq 0$, με $f(x) = y$. Άρα f επί και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

6. Να ελέγξετε αν οι συναρτήσεις της Άσκησης 5 είναι 1-1 και επί.

Απάντηση. (α) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση: $x = \sqrt[3]{y}$. Άρα f είναι 1-1 και επί.

(β) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση: $x = y + 4$. Άρα f είναι 1-1 και επί.

(γ) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση για $y > 3$, άρα η f δεν είναι επί. Επειδή για $y > 3$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \ln(y-3)$, η f είναι 1-1.

(δ) Η εξίσωση $f(x) = y$: για $y = 0$ έχει μία λύση, την $x = 0$. Για κάθε $y \neq 0$, έχει μία λύση, την $x = 1/y$. Άρα η f είναι 1-1 και επί.

7. Δίνονται $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με

$f(n) = n + 1$

$g(n) = 2n$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ 1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις συνθέσεις $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $(f \circ g) \circ h$.

Απάντηση.

$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n+1) = (n+1) + 1 = n + 2$

$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n + 1$

$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = 2(n+1) = 2n + 2$

$$(g \circ h)(n) = g(h(n)) = 2h(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ 2, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$(h \circ g)(n) = h(g(n)) = h(2n) = 0$

$$(f \circ g) \circ h(n) = (f \circ g)(h(n)) = 2h(n) + 1 = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτος} \\ 3, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

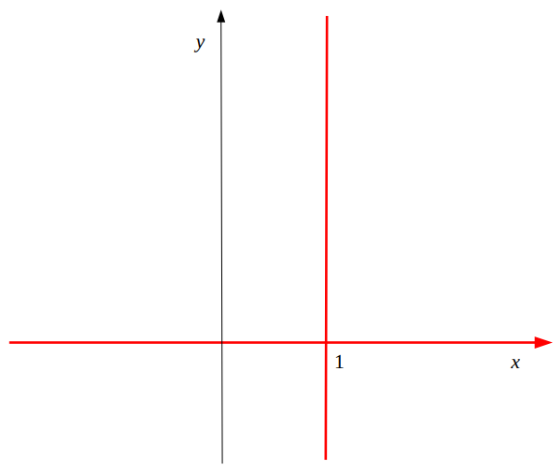
8. Βρείτε το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy}{(x-1)y}.$$

Απάντηση. Πρέπει $(x-1)y \neq 0$, δηλ. πρέπει $x \neq 1$ και $y \neq 0$. Άρα πρέπει από το $\mathbb{R}^2$ να αφαιρεθούν όλα τα ζεύγη που έχουν $x = 1$ και όλα τα ζεύγη που έχουν $y = 0$. Επομένως, μένει το σύνολο

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \big(\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}\big).$$

Δείτε στο επόμενο διάγραμμα: αφαιρούνται τα σημεία που έχουν σχεδιαστεί με κόκκινο.



9. Έστω E σύνολο αναφοράς. Για κάθε $A \subseteq E$, θέτουμε:

$$\chi_A : E \to \mathbb{R} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Να δείξετε ότι

(α) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
(β) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
(γ) $\chi_{E \setminus A} = 1 - \chi_A$
(δ) $A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$.

Απάντηση. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \chi_{A \cap B}(x) = 1 &\iff x \in A \cap B \iff x \in A \;\wedge\; x \in B \\ &\iff \chi_A(x) = 1 \;\wedge\; \chi_B(x) = 1 \\ &\iff \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1 \end{aligned}$$

(β) Κάθε $x \in E$ ικανοποιεί ακριβώς μία από τις παρακάτω τέσσερεις περιπτώσεις:

(1) $x \in A$ και $x \in B$. Τότε: $\chi_{A\cup B}(c) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$ και η ισότητα (β) γίνεται $1 = 1 + 1 - 1$.

(2) $x \in A$ και $x \notin B$. Τότε: $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) = 1$, $\chi_B(x) = 0$ και η (β) γίνεται $1 = 1 + 0 - 0$.

(3) $x \notin A$ και $x \in B$: παρόμοια με την (2).

(4) $x \notin A$ και $x \notin B$. Τότε $\chi_{A\cup B}(c) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$ και η (β) γίνεται $0 = +0 - 0$.

(γ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in E$, έχουμε $x \in A$ ή $x \notin A$, άρα $\chi_A(x) = 1$ και $\chi_{E\setminus A}(x) = 0$, ή $\chi_A(x) = 0$ και $\chi_{A\setminus A}(x) = 1$. Σε κάθε περίπτωση, $\chi_{E\setminus A}(x) + \chi_A(x) = 1$.

(δ) Έστω $A \subseteq B$ και $x \in E$. Αν $x \in A$, τότε $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$. Αν $x \notin A$ αλλά $x \in B$, τότε $\chi_A(x) = 0$, ενώ $\chi_B(x) = 1$. Αν τέλος $x \notin B$, τότε $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$.

10. Έστω $f : A \to B$ συνάρτηση. Θεωρούμε στο A την διμελή σχέση

$$x_1 \sim\ x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

(i) Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρείτε την κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in A$.

(ii) Έστω ότι η f είναι επί. Να δείξετε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $F : A/\!\sim\ \to\ B$, όπου $A/\!\sim$ το σύνολο-πηλίκο.

Απάντηση. (i) Για κάθε $x \in A$, $f(x) = f(x)$, άρα $x \sim x$ και η $\sim$ είναι ανακλαστική. Αν $x_1 \sim x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$, επομένως $f(x_2) = f(x_1)$, άρα $x_2 \sim x_1$ και η $\sim$ είναι συμμετρική. Τέλος, αν $x_1 \sim x_2$ και $x_2 \sim x_3$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$ και $f(x_2) = f(x_3)$, άρα και $f(x_1) = f(x_3)$, επομένως $x_1 \sim x_3$ και η $\sim$ είναι μεταβατική. Αποδείξαμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η κλάση ισοδυναμίας $[x]$ ενός $x \in A$ είναι το σύνολο

$$[x] = \{z \in A \mid z \sim x\} = \{z \in A \mid f(z) = f(x)\}.$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η f είναι επί. Θέτουμε

$$F : A/\!\sim\ \longrightarrow B : F([x]) = f(x).$$

Τότε:

(1) Η F είναι *καλά ορισμένη*, δηλ. η τιμή της σε μια κλάση $[x]$ δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο x της κλάσης: αν $[x]=[z]$, τότε $F([x])=F([z])$. Πράγματι,

$$[x]=[z] \implies f(x)=f(z) \implies F([x])=F([z]).$$

(2) Η F είναι 1-1: Έστω $F([x])=F([z])$. Τότε

$$F([x])=F([z]) \implies f(x)=f(z) \implies x\sim z \implies [x]=[z].$$

(3) Η F είναι επί: Για κάθε $y\in B$, από το επί της f, υπάρχει $x\in A$ με $f(x)=y$. Τότε $F([x])=f(x)=y$.

11. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Θωρούμε το σύλολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{R}$, έστω

$$\mathcal{F}=\{f:A\to\mathbb{R}\},$$

και εφοδιάζουμε το $\mathcal{F}$ με την διμελή σχέση

$$f\le g \iff f(x)\le g(x), \quad \forall\, x\in A.$$

(i) Να δείξετε ότι η $\le$ είναι διάταξη.

(ii) Να εξετάσετε αν η $\le$ είναι ολική διάταξη.

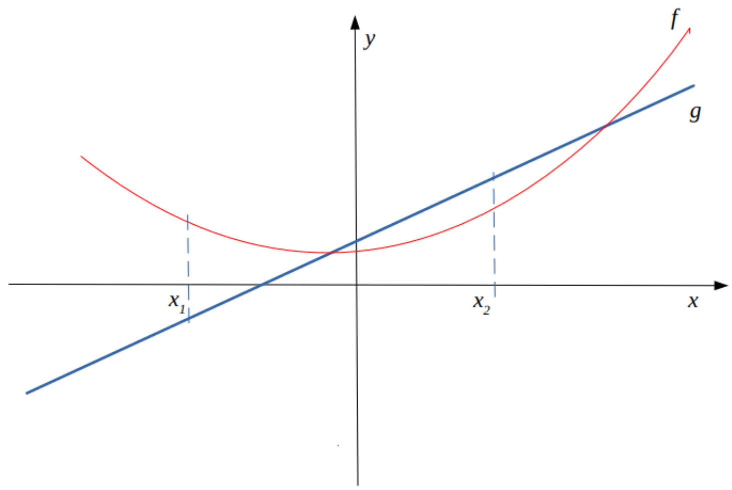
(iii) Να ορίσετε την αντίστοιχη αυστηρή διάταξη $<$.

(iv) Θεωρούμε $A=\mathbb{R}$ και $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις με $f(x)=1$, $g(x)=\cos x$ και $h(x)=e^x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{gathered} f\le g,\ \ g\le f,\ \ f\le h,\ \ h\le f,\ \ g\le h,\ \ h\le g,\\ f<g,\ \ g<f,\ \ f<h,\ \ h<f,\ \ g<h,\ \ h<g. \end{gathered}$$

Απάντηση. (i) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $f\in\mathcal{F}$ και κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)\le f(x)$, άρα $f\le f$ και η $\le$ είναι ανακλαστική. Έστω $f\le g$ και $g\le f$. Τότε για κάθε $x\in A$ είναι $f(x)\le g(x)$ και $g(x)\le f(x)$, απ΄ όπου προκύπτει ότι $f(x)=g(x)$, και $f=g$, δηλ. η $\le$ είναι αντισυμμετρική. Τέλος, αν $f\le g$ και $g\le h$, τότε, για κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)\le g(x)$ και $g(x)\le h(x)$, άρα και $f(x)\le h(x)$. Οπότε και $f\le h$ και η $\le$ είναι μεταβατική. Δείξαμε ότι η $\le$ είναι διάταξη.

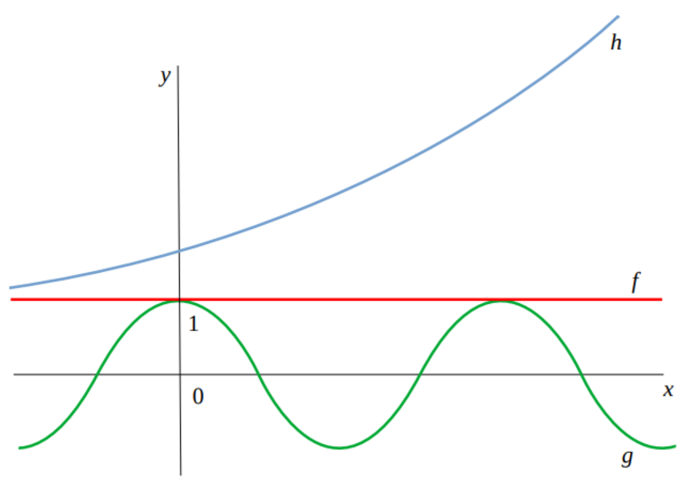
(ii) Η $\le$ δεν είναι ολική διάταξη: αν υπάρχουν δύο σημεία $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)\le g(x_1)$ και $g(x_2)\le f(x_2)$, τότε ούτε $f\le g$, ούτε $g\le f$. Βλ. για παράδειγμα τις γραφικές παραστάσεις δύο τέτοιων συναρτήσεων στο επόμενο διάγραμμα:



(iii) Η αντίστοιχη αυστηρή διάταξη $f < g$ ορίζεται από την ισοδυναμία

$$\begin{aligned} f < g &\iff f \leq g \ \wedge \ f \neq g \\ &\iff \big(\forall\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq g(x)\big) \ \wedge \ \big(\exists\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \neq g(x)\big). \end{aligned}$$

(iv) Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε γραφικές παραστάσεις των f, g, h.



Η $f \le g$ δεν ισχύει, διότι υπάρχει $x = \pi/2 \in \mathbb{R}$, με $g(\pi/2) = 0 < f(\pi/2) = 1$.

Η $g \le f$ ισχύει, διότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x \le 1 = f(x)$.

Η $f \le h$ ισχύει, διότι, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $0 < e^x$, άρα $f(x) = 1 < e^x + 1 = h(x)$.

Η $h \le f$ δεν ισχύει, λόγω της προηγούμενης ανισότητας: αν ίσχυε, από την αντισυμμετρία θα είχαμε $h = f$.

Η $g \le h$ ισχύει, αφού, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos x \le 1 < h(x)$.

Η $h \le g$, δεν ισχύει, πάλι λόγω της αντισυμμετρίας.

Η $f < g$ είναι σύζευξη των $f \le g$ και $f \ne g$. Αφού η $f \le g$ δεν ισχύει, δεν ισχύει ούτε η σύζευξη.

Η $g < f$ ισχύει, διότι $g \le f$ και $g \ne f$.

Η $f < h$, επίσης ισχύει, διότι $f \le h$ και $f \ne h$.

Η $h < f$ δεν ισχύει διότι δεν ισχύει η $h \le f$.

Η $g < h$ ισχύει, επειδή $g \le h$ και $g \ne h$.

Τέλος, η $h < g$ δεν ισχύει, διότι δεν ισχύει η $h \le g$.

12. Στο σύνολο $\mathcal{F}$ της προηγούμενης άσκησης θεωρούμε την διμελή σχέση

$$f \prec g \iff f(x) < g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(i) Να δείξετε ότι η $\prec$ είναι αυστηρή διάταξη.

(ii) Να ορίσετε την αντίστοιχη διάταξη $\preceq$.

(iii) Να συγκρίνετε μέσω της $\prec$ και της $\preceq$ τις f, g, h της προηγούμενης άσκησης.

Απάντηση. (i) Για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{F}$, η σχέση $f(x) < f(x)$ δεν ισχύει για κανένα $x \in \mathbb{R}$, άρα $f \not\prec f$. Επίσης, αν $f \prec g$, τότε $f(x) < g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \not< f(x)$, και $g \not\prec f$. Τέλος, προφανώς, $f \prec g$ και $g \prec h$ συνεπάγονται $f \prec h$. Άρα η $\prec$ είναι αυστηρή διάταξη.

(ii) Η αντίστοιχη διάταξη $\preceq$ δίνεται από την ισοδυναμία

$$f \preceq g \iff f \prec g \ \vee\ f = g.$$

(iii) Ισχύει $f \prec h$ και $g \prec h$. Άρα και $f \preceq h$ και $g \preceq h$. Οι f και g δεν σχετίζονται: Δεν ισχύει $f \prec g$, γιατί για κάθε $x \ne 2k\pi$, $g(x) < f(x)$. Επίσης δεν ισχύει $f = g$, άρα ούτε και $f \preceq g$. Ομοίως, δεν ισχύει $g \preceq f$, διότι στα σημεία $2k\pi$, με $k \in \mathbb{Z}$, είναι $f(2k\pi) = 1 \not< 1 = \cos(2k\pi) = g(2k\pi)$. Επίσης δεν ισχύει $f = g$, άρα ούτε $f \preceq g$.