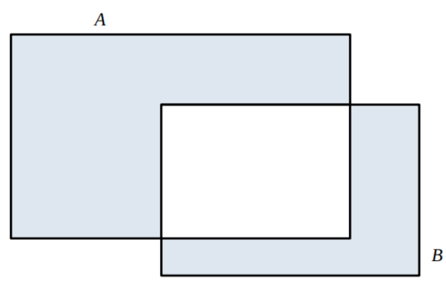
ΜΑΘΗΜΑ 04

6 Συμμετρική διαφορά

6.1 Ορισμός. Έστω $A, B \subseteq E$. Ονομάζουμε ***συμμετρική διαφορά*** των A και B το σύνολο

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



6.2 Πρόταση. *Για κάθε $A, B \subseteq E$ ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

(ii) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Απόδειξη. (i) Άμεσο, από τον ορισμό της συμμετρικής διαφοράς και την σχέση $A \setminus B = A \cap B^c$.

(ii) Εφαρμόζοντας στο δεύτερο μέλος της (i) την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \cap (B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (B \cap A)^c \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

□

6.3 Πρόταση. *Για κάθε* $A, B, C \subseteq E$ *ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $A \triangle \emptyset = A$.

(ii) $A \triangle A = \emptyset$.

(iii) $A \triangle B = B \triangle A$.

(iv) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Απόδειξη. (i) $A \triangle \emptyset = A \cup \emptyset \setminus A \cap \emptyset = A \setminus \emptyset = A$.

(ii) $A \triangle A = A \cup A \setminus A \cap A = A \setminus A = \emptyset$.

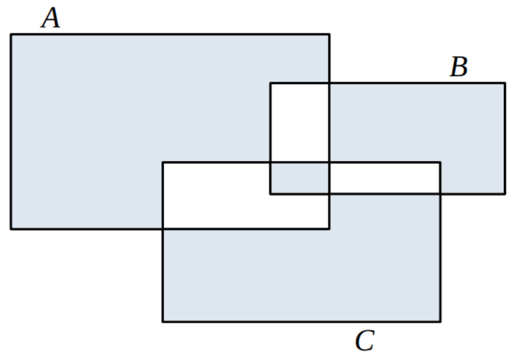
(iii) $A \triangle B = A \cup B \setminus A \cap B = B \cup A \setminus B \cap A = B \triangle A$.

(iv) Για την τελευταία ιδιότητα, έχουμε

$$\begin{aligned}
A \triangle (B \triangle C) &= [A \cap (B \triangle C)^c] \cup [(B \triangle C) \cap A^c] \\
&= \{A \cap [(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)]^c\} \\
&\qquad\qquad \cup \{[(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)] \cap A^c\} \\
&= \{A \cap [(B \cap C^c)^c \cap (C \cap B^c)^c]\} \\
&\qquad\qquad \cup [(B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)] \\
&= \{A \cap [(B^c \cup C) \cap (C^c \cup B)]\} \\
&\qquad\qquad \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c) \\
&= \{A \cap [(B^c \cap C^c) \cup (B^c \cap B) \cup (C \cap C^c) \cup (C \cap B)]\} \\
&\qquad\qquad \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c) \\
&= \{A \cap [(B^c \cap C^c) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (C \cap B)]\} \\
&\qquad\qquad \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c) \\
&= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B) \\
&\qquad\qquad \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)
\end{aligned}$$

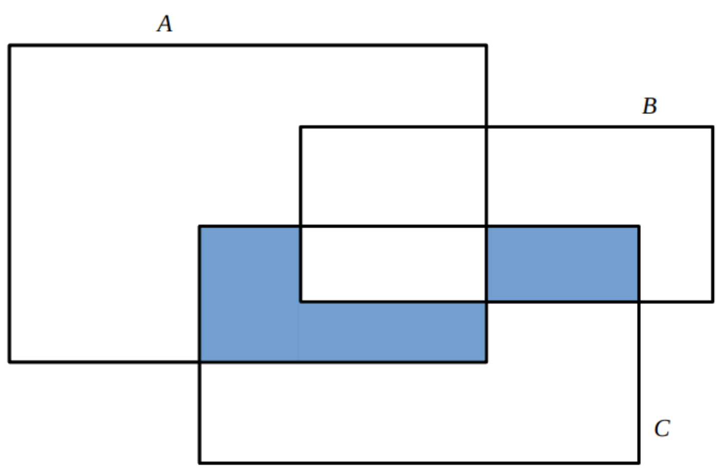
Η τελευταία παράσταση είναι συμμετρική ως προς A, B, C, απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. $\square$

Το σύνολο $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα του Venn:



6.4 Πρόταση. *(επιμεριστική ιδιότητα). Για κάθε $A, B, C \subseteq E$, ισχύει*

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C). \tag{9}$$



Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (ii) της Πρότασης 6.2 και (v) της Πρότασης 4.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}(A \triangle B) \cap C &= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cap C \\ &= [(A \cup B) \cap C] \setminus [(A \cap B) \cap C] \\ &= [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \setminus [(A \cap C) \cap (B \cap C)] \\ &= (A \cap C) \triangle (B \cap C).\end{aligned}$$ □

6.5 Παρατήρηση.* Θεωρούμε ένα σύνολο αναφοράς E και περιορίζουμε την μελέτη μας στα υποσύνολά του. Συγκρίνοντας με τις ιδιότητες της πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών, παρατηρούμε ότι η συμμετρική διαφορά μεταξύ των στοιχείων του $\mathcal{P}(E)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(Σ1) Είναι *μεταθετική*, δηλ. $A \triangle B = B \triangle A$, για κάθε $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

(Σ2) Είναι *προσεταιριστική*, δηλ. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$, για κάθε $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

(Σ3) Έχει *ουδέτερο στοιχείο*, το $\emptyset$: $\emptyset \cup A = A$, για κάθε $A \in \mathcal{P}(E)$.

(Σ4) Κάθε $A \in \mathcal{P}(E)$ *έχει συμμετρικό*, το ίδιο το A: $A \triangle A = \emptyset$.

Βλέπουμε ότι υπάρχει απόλυτη αναλογία στις ιδιότητες της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$ και της συμμετρικής διαφοράς στο $\mathcal{P}(E)$. Τα δύο αυτά σύνολα με τις αντίστοιχες πράξεις τους είναι *αβελιανές/μεταθετικές ομάδες*.

Από τις ανωτέρω ιδιότητες προκύπτει ότι ισχύει η ισοδυναμία

(10) $$A \triangle X = A \triangle Y \iff X = Y.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} A \triangle X = A \triangle Y &\Rightarrow A \triangle (A \triangle X) = A \triangle (A \triangle Y) \\ &\Rightarrow (A \triangle A) \triangle X = (A \triangle A) \triangle Y \\ &\Rightarrow \emptyset \triangle X = \emptyset \triangle Y \\ &\Rightarrow X = Y \end{aligned}$$

Επίσης, λύνουμε μονοσήμαντα εξισώσεις της μορφής

(11) $$A \triangle X = B,$$

ακολουθώντας την διαδικασία με την οποία λύνουμε την εξίσωση $a + x = b$, στο $\mathbb{R}$, δηλ. προσθέτοντας και στα δύο μέλη της ισότητας το συμμετρικό (: αντίθετο) του a:

$$a + x = b \Rightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + b \Rightarrow x = b - a.$$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} A \triangle X = B &\Rightarrow A \triangle (A \triangle X) = A \triangle B \\ &\Rightarrow (A \triangle A) \triangle X = A \triangle B \\ &\Rightarrow \emptyset \triangle X = A \triangle B \\ &\Rightarrow X = A \triangle B \end{aligned}$$