ΜΑΘΗΜΑ 03

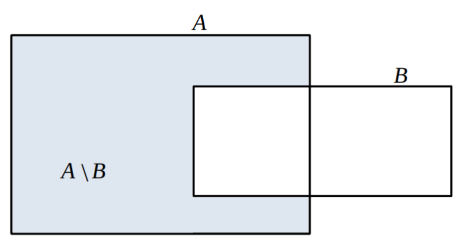
4 Συνολοθεωρητική Διαφορά

Παρακάτω θα αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\wedge$ (και) για την σύζευξη των προτάσεων και $\vee$ (είτε) για την διάζευξη.

4.1 Ορισμός. Έστω A, B σύνολα. Ονομάζουμε ***(συνολοθεωρητική) διαφορά*** των A και B το σύνολο

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Η διαφορά $A \setminus B$ φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn:



4.2 Πρόταση. *Έστω A, B, C σύνολα. Η συνολοθεωρητική διαφορά έχει τις επόμενες ιδιότητες:*

(i) $A \setminus B \subseteq A$.
(ii) $A \setminus \emptyset = A$ *και* $A \setminus A = \emptyset$.
(iii) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.
(iv) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
(v) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ *(επιμεριστική ιδιότητα).*

Απόδειξη. (i) Προφανές: $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B \Rightarrow x \in A$.

(ii) Για την πρώτη ισότητα, λόγω της (i), αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq A \setminus \emptyset$.

Πράγματι,

$$x \in A \implies x \in A \;\wedge\; x \notin \emptyset \implies x \in A \setminus \emptyset.$$

Για την δεύτερη ισότητα: Αν υπάρχει $x \in A \setminus A$ τότε $x \in A \;\wedge\; x \notin A$, άτοπο, άρα δεν υπάρχει τέτοιο x και $A \setminus A = \emptyset$.

(iii) Αν υπάρχει $x \in (A \setminus B) \cap B$ τότε $(x \in A \;\wedge\; x \notin B) \;\wedge\; x \in B$, δηλ. $x \in A \wedge$ $(x \notin B \;\wedge\; x \in B)$, άτοπο.

(iv) Δίνουμε δύο αποδείξεις: (A) Θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία (4) του Μαθήματος 01: Αν $x \in A \setminus (A \cap B)$ τότε $x \in A$ και $x \notin A \cap B$. Από την σχέση $x \notin A \cap B$ προκύπτει $x \notin A$ (άτοπο), είτε $x \notin B$, που είναι δεκτό. Άρα $x \in A$ και $x \notin B$, δηλ. $x \in A \setminus B$ και

$$A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B.$$

Αν $x \in A \setminus B$, τότε $x \in A$ και $x \notin B$, άρα $x \notin A \cap B$, δηλ. $x \in A \setminus (A \cap B)$ και

$$A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B).$$

Από τους δύο εγκλεισμούς έπεται η ισότητα.

(B) Για την δεύτερη απόδειξη, με χρήση του Προτασιακού Λογισμού, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \cap B) &\iff x \in A \;\wedge\; x \notin A \cap B \\ &\iff x \in A \;\wedge\; (x \notin A \;\vee x \;\notin B) \\ &\iff (x \in A \;\wedge\; x \notin A) \;\vee\; (x \in A \;\wedge\; x \notin B) \end{aligned}$$

Επειδή η πρώτη από τις προτάσεις της τελευταίας διάζευξης είναι πάντα ψευδής, έχουμε

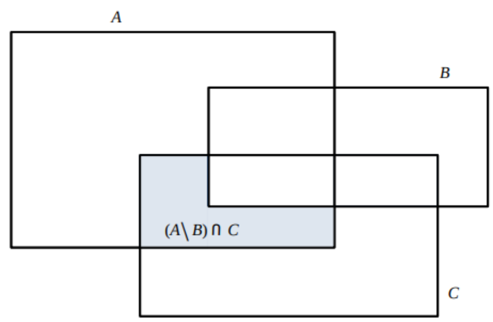
$$x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B.$$

(v) Για την επιμεριστική ιδιότητα, χρησιμοποιώντας τον Προτασιακό Λογισμό, έχουμε

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap C &\iff x \in (A \setminus B) \;\wedge\; x \in C \\ &\iff (x \in A \;\wedge\; x \notin B) \;\wedge\; x \in C \\ &\iff (x \in A \;\wedge\; x \in C) \;\wedge\; (x \in C \;\wedge\; x \notin B) \\ &\iff x \in A \cap C \;\wedge\; x \notin (B \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) \end{aligned}$$

□

Το σύνολο $(A \setminus B) \cap C$ φαίνεται στο διάγραμμα

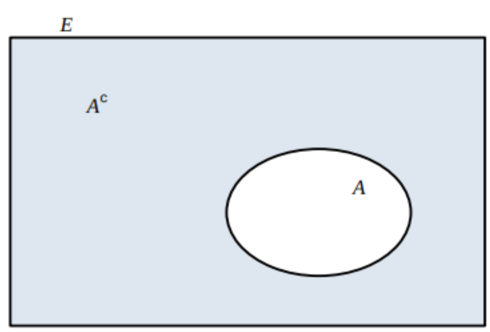


5 Συμπλήρωμα

Μια συνήθης κατάσταση στα μαθηματικά είναι να ασχολείται κανείς όχι με οποιαδήποτε σύνολα, αλλά με τα υποσύνολα ενός δεδομένου συνόλου E. Π.χ. στον Απειροστικό Λογισμό ασχολούμαστε με υποσύνολα του $E = \mathbb{R}$. Αν ένα τέτοιο σύνολο E είναι δεδομένο, θα το λέμε ***σύνολο αναφοράς***. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να οριστεί η επόμενη έννοια:

5.1 Ορισμός. Έστω E σύνολο αναφοράς και $A \subseteq E$. Ονομάζουμε ***συμπλήρωμα του*** A ***(ως προς το*** E***)*** την συνολοθεωρητική διαφορά

$$A^c = E \setminus A = \{x \in E : x \notin A\}.$$



5.2 Παρατηρήσεις. (1) Για κάθε $x \in E$, $A \subseteq E$ ισχύει ακριβώς μία από τις σχέσεις

$$x \in A \qquad \text{ή} \qquad x \in A^c$$

(2) Για κάθε $A \subseteq E$, ισχύει

$$A \cap A^c = \emptyset \qquad \text{και} \qquad A \cup A^c = E.$$

(3) Για κάθε $A, B \subseteq E$ ισχύει

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

5.3 Πρόταση. *Έστω E σύνολο αναφοράς. Τότε*
(i) $\emptyset^c = E$ και $E^c = \emptyset$.
(ii) Για κάθε $A \subseteq E$, ισχύει $(A^c)^c = A$.
(iii) Έστω $A, B \subseteq E$. Ισχύει η συνεπαγωγή

$$A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c.$$

Απόδειξη. (iii) Με άτοπο: Έστω $A \subseteq B$ αλλά $B^c \nsubseteq A^c$. Τότε υπάρχει $x \in B^c$ για το οποίο ισχύει $x \notin A^c$. Δηλ. $x \notin B$ ενώ $x \in A$, άτοπο. □

Η επόμενη πρόταση περιγράφει πώς συμπεριφέρεται το συμπλήρωμα όταν εφαρμόζεται σε τομές και ενώσεις.

5.4 Πρόταση. *(Κανόνες του De Morgan). Έστω E ένα σύνολο αναφοράς και $A, B \subseteq E$. Τότε*
(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, και
(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Απόδειξη. Οι κανόνες De Morgan για τα συμπληρώματα συνόλων είναι απόρροια των αντίστοιχων κανόνων του Προτασιακού Λογισμού, για τις αρνήσεις των προτάσεων:

(1) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \ \wedge \ x \notin B \\ &\iff x \in A^c \ \wedge \ x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

(2) Ανάλογα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\iff x \notin A \cap B \iff x \notin A \ \vee \ x \notin B \\ &\iff x \in A^c \ \vee \ x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

□